CORSO DI MATEMATICA

2

MARIOLINA CAPPADONNA
PIERPAOLO DESTRI

PER L'ISTRUZIONE E LA FORMAZIONE PROFESSIONALE

Edizione **OPENSCHOOL**

1	**LIBRO**DITESTO
2	**E-BOOK+**
3	RISORSE**ONLINE**
4	**PIATTAFORMA**

HOEPLI

MARIOLINA CAPPADONNA PIERPAOLO DESTRI

Corso di matematica

Per l'Istruzione
e la Formazione Professionale

VOLUME 2

EDITORE ULRICO HOEPLI MILANO

Via Hoepli 5, 20121 Milano (Italy)
tel. +39 02 864871 – fax +39 02 8052886
e-mail hoepli@hoepli.it

www.hoepli.it

LIBRO DIGITALE

Indice

Presentazione

Il libro si presenta come uno strumento agevole per l'apprendimento dei temi di matematica del biennio di un **corso di Istruzione** e **Formazione Professionale**. Il linguaggio utilizzato presenta in modo chiaro anche i contenuti concettualmente più impegnativi e, seppur semplice e scorrevole, risulta nel contempo rigoroso, tipico della disciplina.

I capitoli sono così strutturati:

- breve introduzione di un nuovo argomento;
- esercizio svolto, per meglio apprendere la parte teorica;
- mappa concettuale, per sintetizzare i concetti e le procedure fondamentali e per agevolare l'apprendimento degli studenti con bisogni educativi speciali;
- esercizi proposti strutturati in funzione del loro grado di difficoltà, da svolgere in modo autonomo, identificati come "verifica delle abilità";
- esercizi proposti, da svolgere in modo autonomo, scritti con font ad alta leggibilità, per agevolare gli allievi con disturbi specifici dell'apprendimento.

Definizioni, proprietà, teoremi, osservazioni, regole e suggerimenti sono evidenziati all'interno di box colorati.
In fondo ai capitoli sono inserite delle mappe inclusive, utili quindi a tutti gli studenti, non solo a quelli con bisogni educativi speciali.

Le nozioni fondamentali e le verifiche delle abilità sono scritte con font ad alta leggibilità, al fine di abbattere le barriere di ostacolo all'accesso e alla comprensione dei contenuti. La proposta di esercizi è ricca e costituisce parte integrante della trattazione. Dopo ogni nuovo concetto, definizione, proprietà è presente un box colorato al cui interno ogni passaggio è spiegato passo passo. Gli esercizi proposti sono presentati in funzione del loro grado di difficoltà.

Un puntino colorato accanto al numero indica un esercizio di difficoltà maggiore rispetto a quello senza contrassegno; due puntini indicano gli esercizi più impegnativi. La gradualità consente non solo di accompagnare l'allievo ad apprendere con agevolezza i contenuti, ma anche di consolidare quanto appreso.

La *Guida per il docente* raccoglie riferimenti normativi, utili informazioni su diverse metodologie da adottare nella didattica di tutti i giorni, utili suggerimenti e spunti relativi alla didattica per studenti con bisogni educativi speciali, tutte le soluzioni degli esercizi, una sezione di aiuto per studenti con disturbi specifici dell'apprendimento, delle verifiche di abilità su ogni capitolo.

L’OFFERTA DIDATTICA **HOEPLI**

L’edizione **Openschool** Hoepli offre a docenti e studenti tutte le potenzialità di Openschool Network (ON), il nuovo sistema integrato di contenuti e servizi per l’apprendimento.

Edizione **OPENSCHOOL**

LIBRO DI TESTO +

Il libro di testo è l’**elemento cardine** dell’offerta formativa, uno strumento didattico **agile** e **completo**, utilizzabile **autonomamente** o in combinazione con il ricco **corredo digitale** offline e online. Secondo le più recenti indicazioni ministeriali, volume cartaceo e apparati digitali **sono integrati in un unico percorso didattico.** Le espansioni accessibili attraverso l’eBook+ e i materiali integrativi disponibili nel sito dell’editore sono puntualmente richiamati nel testo tramite apposite icone.

eBOOK+ +

L’**eBook+** è la versione digitale e interattiva del libro di testo, utilizzabile su **tablet, LIM e computer**. Aiuta a comprendere e ad approfondire i contenuti, rendendo l’apprendimento più attivo e coinvolgente. Consente di leggere, annotare, sottolineare, effettuare ricerche e accedere direttamente alle numerose **risorse digitali integrative**.

➔ Scaricare l’eBook+ è molto **semplice**. È sufficiente seguire le istruzioni riportate nell’ultima pagina di questo volume.

RISORSE ONLINE +

Il sito della casa editrice offre una ricca dotazione di **risorse digitali** per l’approfondimento e l’aggiornamento. Nella pagina web dedicata al testo è disponibile **my BookBox**, il contenitore virtuale che raccoglie i materiali integrativi che accompagnano l’opera.

➔ Per accedere ai materiali è sufficiente registrarsi al sito **www.hoepliscuola.it** e inserire il codice coupon che si trova nell’ultima pagina di questo volume. **Per il docente** nel sito sono previste ulteriori risorse didattiche dedicate.

PIATTAFORMA DIDATTICA

La **piattaforma didattica** è un ambiente digitale che può essere utilizzato in modo duttile, a misura delle esigenze della classe e degli studenti. Permette in particolare di **condividere contenuti** ed **esercizi** e di partecipare a **classi virtuali**. Ogni attività svolta viene salvata sul **cloud** e rimane sempre disponibile e aggiornata. La piattaforma consente inoltre di consultare la versione online degli eBook+ presenti nella propria libreria.

➔ È possibile accedere alla piattaforma attraverso il sito **www.hoepliscuola.it**.

Unità 1

Numeri

1.1 Ripasso

I numeri naturali

L'insieme dei **numeri naturali** viene indicato con *N*. Esso indica l'insieme {0, 1, 2, 3, 4, ...}.
Ogni numero naturale diverso da 0 possiede:
- il precedente, ossia il numero che lo precede di un'unità;
- il successivo, ossia il numero che lo segue di un'unità.

È sempre possibile confrontare due numeri naturali tra loro, quindi stabilire quale relazione d'ordine esiste tra loro: un numero naturale diverso da zero è maggiore del suo precedente e minore del suo successivo.

Il minimo comune multiplo di più numeri è il più piccolo dei multipli comuni dei numeri. Esso si indica con la sigla **mcm** ed è uguale al prodotto dei fattori primi comuni e non comuni, presi una sola volta e con il maggior esponente.

Il Massimo Comun Divisore di più numeri è il più grande dei divisori comuni dei numeri. Esso si indica con la sigla **MCD** ed è uguale al prodotto dei fattori primi comuni, presi una sola volta e con il minor esponente.

Con i numeri naturali è sempre possibile eseguire l'addizione e la moltiplicazione. Per eseguire la divisione è necessario ampliare l'insieme N, passando all'insieme *Q*.

Le frazioni

Il quoziente della divisione tra due numeri naturali a e b, con $b \neq 0$, è anche detto **rapporto** tra a e b.
Una **frazione** $\frac{a}{b}$ è il rapporto tra due numeri naturali a e b, di cui il secondo è diverso da zero ($b \neq 0$).
Le frazioni si suddividono in:
- proprie, in cui il numeratore è minore del denominatore;
- improprie, in cui il numeratore è maggiore del denominatore;
- apparenti, in cui il numeratore è multiplo del denominatore.

Tutti i numeri che possono essere espressi da una frazione sono detti numeri **razionali**. L'insieme dei numeri razionali viene indicato con *Q*.

La divisione tra il numeratore e il denominatore di una frazione, quando l'uno non è multiplo dell'altro, genera un **numero decimale**, costituito da due parti separate tra loro da una virgola.
La parte che precede la virgola è denominata parte intera del numero decimale; l'altra è la parte decimale.
Se la parte decimale ha un numero **finito** di cifre, il numero decimale è detto **finito**; altrimenti il numero decimale è infinito o illimitato.

Una frazione che contiene al denominatore potenze del 10 ed è ridotta ai minimi termini è detta **decimale**.
Per trovare il numero decimale finito generato da una frazione decimale, si scrive il numeratore e si sposta la virgola verso sinistra di tanti posti quanti sono gli zeri contenuti al denominatore.
Una frazione il cui denominatore contiene come fattori primi solo il 2, solo il 5 o solo entrambi genera un numero decimale finito. Per individuarlo, basta dividere il numeratore per il denominatore.

La frazione generatrice di un numero decimale finito possiede:
- al numeratore il numero privato della virgola e degli 0 finali della parte decimale;
- al denominatore il 10 elevato al numero di cifre decimali presenti nel numero.

Sono esclusi dal conteggio gli 0 finali della parte decimale.
Fra i numeri decimali illimitati si possono distinguere quelli periodici nei quali, dopo la virgola, esiste un gruppo di cifre che continuano a ripetersi, denominato periodo.
I numeri periodici si dividono in **periodici semplici** e **periodici misti**, a seconda che il periodo si trovi immediatamente dopo la virgola o se tra la virgola e il periodo ci sono altre cifre dette antiperiodo.

Una frazione irriducibile genera un numero periodico semplice se il suo denominatore non contiene come fattori primi né il 2, né il 5.

La frazione generatrice di un numero periodico semplice possiede:
- al numeratore la differenza di tutte le cifre del numero, privato della virgola e del trattino, con la parte intera;
- al denominatore tanti 9 quante sono le cifre che costituiscono il periodo.

Una frazione irriducibile genera un numero periodico misto se il suo denominatore contiene come fattori primi il 2 e altri numeri diversi da 5, il 5 e altri numeri diversi da 2 o il 2 e il 5 insieme ad altri numeri diversi da 2 e da 5.

La frazione generatrice di un numero periodico misto possiede:
- al numeratore la differenza del numero privato della virgola e del trattino con il numero formato da tutte le cifre intere e decimali che precedono il periodo (esclusi gli 0 iniziali della parte intera);
- al denominatore tanti 9 quante sono le cifre che costituiscono il periodo seguiti da tanti zeri quante solo le cifre dell'antiperiodo.

Un numero si dice scritto in **notazione scientifica** se è espresso sotto forma di prodotto $a \cdot 10^n$, con $1 \leq a < 10$.
Se un numero x è già compreso tra 1 e 10, $1 \leq x < 10$, la sua notazione scientifica è $x \cdot 10^0$.
Se un numero x non è compreso tra 1 e 10, si contano le posizioni N che servono per spostare la virgola e ottenere un numero a compreso tra 1 e 10 ossia tale che $1 \leq a < 10$.

Se la virgola deve essere spostata di N posizioni verso sinistra, si scrive il numero come prodotto di a per 10 elevato al numero N.
Se la virgola deve essere spostata di N posizioni verso destra, si scrive il numero come prodotto di a per 10 elevato a $-N$.

La notazione scientifica è utile per esprimere numeri molto grandi o molto piccoli e lavorare con essi mediante le proprietà delle potenze.

In N è sempre possibile eseguire l'addizione e la moltiplicazione. In Q è sempre possibile eseguire l'addizione, la moltiplicazione, la divisione tra due numeri razionali. Per eseguire la sottrazione è necessario un ampliamento, passando all'insieme Z dei numeri con segno.

I numeri con segno

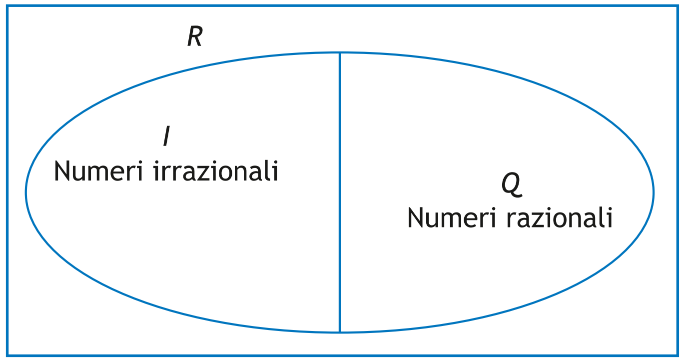
L'insieme numerico che si costruisce a partire dall'insieme N, associando allo 0 se stesso e a ogni numero i due numeri che si ottengono facendolo precedere dal segno + e dal segno − è l'insieme Z. In modo analogo, è possibile costruire l'insieme Q_+ delle frazioni positive (precedute dal +) e l'insieme Q_- delle frazioni negative (precedute dal segno −) e dallo 0.

Un numero preceduto dal segno + è un numero **positivo**. Un numero preceduto dal segno − è un numero **negativo**. Allo 0 non si attribuisce alcun segno.
Numeri che hanno lo stesso segno sono denominati **concordi**; numeri aventi segno opposto sono **discordi**. Due numeri aventi segno diverso e ottenuti dallo stesso numero naturale sono denominati **opposti**.

Numeri reali

L'insieme dei numeri decimali illimitati non periodici, che **non** possono essere espressi come numeri razionali, prende il nome di **insieme *I* dei numeri irrazionali**.

L'insieme costituito dall'unione dell'insieme dei numeri razionali *Q* con *I* prende il nome di **insieme *R* dei numeri reali**.



Esso è costituito da tutti i numeri interi (positivi e negativi), dallo zero, dalle frazioni $\frac{a}{b}$ che si costruiscono con numeri interi a e b, con $b \neq 0$ e, infine, dai numeri irrazionali.

L'insieme *R* è l'insieme numerico che contiene tutti gli altri insiemi numerici sin qui studiati.

Mappa

Operazioni tra numeri con segno

- **Addizione**
  - $(+2) + (+3) = +5$
  - $(+2) + (-3) = -1$
  - $(-2) + (-3) = -5$
  - $(-2) + (+3) = +1$
- **Sottrazione**
  - $(+2) - (-3) = +5$
  - $(+2) - (+3) = -1$
- **Moltiplicazione**
  - $(+) \cdot (+) = (+)$
    $(-) \cdot (-) = (+)$
    $(+) \cdot (-) = (-)$
    $(-) \cdot (+) = (-)$
  - $(+2) \cdot (+3) = +6$
    $(-2) \cdot (-3) = +6$
    $(+2) \cdot (-3) = -6$
    $(-2) \cdot (+3) = -6$
- **Divisione**
  - $(+2) : (+3) = +\frac{2}{3}$
    $(-2) : (-3) = +\frac{2}{3}$
    $(+2) : (-3) = -\frac{2}{3}$
    $(-2) : (+3) = -\frac{2}{3}$

Proprietà delle potenze

$$2^5 \cdot 2^4 = 2^{5+4} = 2^9$$
$$2^5 : 2^4 = 2^{5-4} = 2^1 = 2$$
$$3^2 \cdot 2^2 = (3 \cdot 2)^2 = 6^2 = 36$$
$$5^2 : 3^2 = (5 : 3)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$
$$(2^2)^3 = 2^6 = 64$$

Verifica delle abilità

Calcolare il MCD e il mcm dei seguenti numeri.

1. 220; 1100; 75; 120; 320

Individuare le frazioni che generano i seguenti numeri decimali.

2. $2,\overline{6}$

3. $0,01\overline{7}$

4. $0,007$

Stabilire se le seguenti frazioni generano un numero decimale finito, periodico semplice o periodico misto.

5. $\frac{11}{7}$

6. $\frac{7}{4}$

7. $\frac{13}{6}$

Tradurre le seguenti frasi in espressioni e calcolare poi il risultato.

8. Il prodotto tra il precedente di 3 e la differenza di dodici con cinque.

9. Il prodotto tra il successivo di –41 e la differenza di –15 con +5 diviso il quadrato di –20.

10. Dividere per il cubo di –2 il quadrato della moltiplicazione per –2 della divisione tra –120 e la differenza di –36 e –6.

Calcolare le seguenti espressioni.

11. $\left(2-\frac{6}{4}\right)^2+\left(4+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{12}{23}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)^2$

12. $\left\{\left[\frac{1}{2}+5:\left(1+\frac{2}{3}\right)\right]\cdot\left(1-\frac{3}{7}\right)\right\}:\left[\frac{1}{6}-\frac{2}{3}+2\right]-\frac{2}{3^2}$

13. $\left\{\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\left(\frac{7}{4}-1\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)\right)\right]-\frac{1}{60}\right\}:\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot\frac{15}{2}$

14. $[(+3)^3:(-2+5)^2-5]:(-2)$

15. $[(-2)^2\cdot(-3)^2+2^3\cdot(3^2-1):2^4+(-3)^2]:[(-2)\cdot(-5)-13+10]$

16. $(-3)\cdot[(-5)^2:(-5)+5\cdot(-3)\cdot(-1)]:[-1+(-2)^3(-2)^5:(-2)^6]$

17. $[(-2)^2 \cdot (1 - 3^2) : (-2)^4 - (-2)^2 \cdot (-3)^2 - (-2)^3] : [(-3) \cdot (-5) - 5 + (-2)^2 \cdot (+5)]$

18. $\{[(-7^3)^2 : (-2 - 5)^5 - 7] : (-2) + 3 \cdot [-15 : (-5) + 2 \cdot 3 \cdot (-1)]\} : (-2)$

19. $\left[\left(4-\frac{19}{5}\right)^2 : \left(2-\frac{7}{5}\right)\right] : \left(-\frac{2}{3}\right)$

20. $\left(-2+\frac{5}{4}\right)^3 : \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2^2}\right)$

21. $\left[\left(-2+\frac{6}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}-1-\frac{3}{4}\right)^2\right] : \left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)$

Unità 2

Funzioni

2.1 Proporzioni

Proporzioni

DEFINIZIONE

Una **proporzione** numerica è un'uguaglianza vera tra due rapporti.

$\underline{7 : 8} = \underline{28 : 32}$

"7 sta a 8"   "28 sta a 32"

"7 sta a 8" *come* "28 sta a 32"

Nella proporzione $a : b = c : d$

- a, b, c, d sono i termini;
- a e d sono gli estremi;
- b e c sono i medi;
- a e c sono gli antecedenti;
- b e d sono i conseguenti.
- d è il quarto proporzionale.

Se i medi di una proporzione numerica sono uguali, la proporzione si dice **continua** e ciascun medio prende il nome di medio proporzionale.

ESERCIZI SVOLTI

- $5 : 3 = 10 : 6$ è una proporzione. 5 e 6 sono gli estremi, 3 e 10 i medi, 5 e 10 gli antecedenti, 3 e 6 i conseguenti.
- Nella proporzione continua $6 : 24 = 24 : 96$, 24 è il medio proporzionale.

Proprietà delle proporzioni numeriche

In una proporzione numerica $a : b = c : d$ sono valide le seguenti proprietà:

- **Proprietà fondamentale**
Il prodotto dei medi di una proporzione è uguale al prodotto degli estremi.

Nella proporzione **5 : 2 = 15 : 6** il prodotto dei medi **2 · 15 = 30** è uguale al prodotto degli estremi **5 · 6 = 30**.
Di conseguenza:

- un estremo è uguale al prodotto dei medi diviso l'altro estremo: $5 = \frac{2 \cdot 15}{6}$ e $6 = \frac{2 \cdot 15}{5}$;
- un medio è uguale al prodotto degli estremi diviso l'altro medio: $2 = \frac{5 \cdot 6}{15}$ e $15 = \frac{5 \cdot 6}{2}$.

- Per la proprietà fondamentale, in una proporzione continua, il medio proporzionale è uguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi.

Nella proporzione **12 : 6 = 6 : 3**, il medio $\mathbf{6} = \sqrt{\mathbf{12 \cdot 3}}$.

- **Proprietà del permutare**
Scambiando fra loro i medi o fra loro gli estremi di una proporzione, si ottiene ancora una proporzione.

Nella proporzione **5 : 2 = 15 : 6**, se si scambiano fra loro i medi: **5 : 15 = 2 : 6** o fra loro gli estremi: **6 : 2 = 15 : 5**, si ottiene ancora una proporzione.

- **Proprietà dell'invertire**
Scambiando fra loro ogni antecedente con il suo conseguente, si ottiene ancora una proporzione.

Nella proporzione **5 : 2 = 15 : 6**, scambiando fra loro ogni antecedente con il suo conseguente: **2 : 5 = 6 : 15**, si ottiene ancora una proporzione.

- **Proprietà del comporre**
Sostituendo a ogni antecedente la somma di quest'ultimo con il suo conseguente, si ottiene ancora una proporzione.

Nella proporzione $5 : 2 = 15 : 6$

$(5 + 2) : 2 = (15 + 6) : 6 \rightarrow 7 : 2 = 21 : 6$

Sostituendo a ogni antecedente la somma di quest'ultimo con il suo conseguente e a ogni conseguente il suo antecedente, si ottiene ancora una proporzione.

$(5 + 2) : 5 = (15 + 6) : 15 \rightarrow 7 : 5 = 21 : 15$

Di conseguenza, la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come ogni antecedente sta al suo conseguente:

$(5 + 15) : (2 + 6) = 5 : 2$ e $(5 + 15) : (2 + 6) = 15 : 6$

- **Proprietà dello scomporre**

Sostituendo a ogni antecedente la differenza di quest'ultimo con il suo conseguente, si ottiene ancora una proporzione.

$5 : 2 = 15 : 6 \rightarrow (5 - 2) : 2 = (15 - 6) : 6$

Sostituendo a ogni antecedente la differenza di quest'ultimo con il suo conseguente e a ogni conseguente il suo antecedente, si ottiene ancora una proporzione.

$5 : 2 = 15 : 6 \rightarrow (5 - 2) : 5 = (15 - 6) : 15$

ESERCIZI SVOLTI

- Il termine incognito della proporzione numerica $12 : 34 = 30 : x$ è
  $$x = \frac{34 \cdot 30}{12} = 85\,.$$
- Il termine incognito della proporzione numerica $12 : x = 36 : 72$ è
  $$x = \frac{12 \cdot 72}{36} = 24\,.$$
- Il quarto proporzionale della proporzione numerica $5 : 20 = 20 : x$ è
  $$x = \frac{20^2}{5} = 80\,.$$
- Il medio proporzionale della proporzione numerica $5 : x = x : 125$ è
  $$x = \sqrt{5 \cdot 125} = \sqrt{625} = 25\,.$$
- Il medio proporzionale della proporzione numerica $5 : x = x : 12$ non esiste in Q perché in Q non esiste la radice quadrata di 60:

  $5 : x = x : 12 \rightarrow x^2 = 5 \cdot 12 \rightarrow x^2 = 60.$

Serie di rapporti uguali

Una **serie di rapporti uguali** è l'uguaglianza di più rapporti.

Presi in considerazione i rapporti uguali:

$45 : 3 = 15 \qquad 30 : 2 = 15 \qquad 60 : 4 = 15 \qquad 120 : 8 = 15$

Sarà possibile scrivere la serie di rapporti uguali:

$$45 : 3 = 30 : 2 = 60 : 4 = 120 : 8$$

- **Proprietà di una serie di rapporti uguali**
  La somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come un antecedente sta al suo conseguente.

Presa in considerazione la serie di rapporti uguali.

$45 : 3 = 30 : 2 = 60 : 4 = 120 : 8$ si avrà:

$(45 + 30 + 60 + 120) : (3 + 2 + 4 + 8) = 30 : 2$ infatti $255 : 17 = 30 : 2$

oppure

$(45 + 30 + 60 + 120) : (3 + 2 + 4 + 8) = 60 : 4$

oppure

$(45 + 30 + 60 + 120) : (3 + 2 + 4 + 8) = 120 : 8$

La proprietà si rivela utile se in una catena di rapporti sono incogniti tutti gli antecedenti o tutti i conseguenti ed è nota la loro somma.

ESERCIZI SVOLTI

Sia data la serie di rapporti uguali: $x : 3 = y : 2 = z : 9$, con $x + y + z = 168$.
È possibile applicare la proprietà:

$$(x + y + z) : (3 + 2 + 9) = x : 3$$
$$(x + y + z) : (3 + 2 + 9) = y : 2$$
$$(x + y + z) : (3 + 2 + 9) = z : 9$$

per cui:

$168 : 14 = x : 3 \rightarrow x = \dfrac{168 \cdot 3}{14} = 36$

$168 : 14 = y : 2 \rightarrow y = \dfrac{168 \cdot 2}{14} = 24$

$168 : 14 = z : 9 \rightarrow z = \dfrac{168 \cdot 9}{14} = 108$

Grandezze

DEFINIZIONE

Una **grandezza** è una proprietà di un elemento, di un ente, di un evento, di un fenomeno.

Tale proprietà è misurabile ossia confrontabile con una grandezza omogenea (dello stesso tipo), scelta come grandezza di riferimento. La grandezza di riferimento è detta **unità di misura**. L'operazione di confronto deve stabilire quante volte la grandezza di riferimento è uguale, minore o maggiore della grandezza da misurare. La **misura** di una grandezza è rappresentata da un valore numerico, seguito dal simbolo dell'unità di misura scelta per misurarla.

Alcune grandezze vengono misurate direttamente e, per questo, le loro misure sono dette **dirette**.

Altre necessitano di calcoli aggiuntivi e, per questo, le loro misure sono dette **indirette**.

Tra le misure dirette ci sono, ad esempio, il peso, che deve essere misurato con lo strumento *bilancia*, l'altezza che viene misurata con lo strumento *metro*. Misure come l'area rientrano tra quelle indirette.

Una grandezza si dice **costante** quando il suo valore non varia in diverse misurazioni. Si dice **variabile** quando assume valori diversi in misurazioni diverse.

Grandezze proporzionali

DEFINIZIONE

Due grandezze, i cui valori dipendono l'uno dall'altro, sono **direttamente proporzionali** se all'aumentare dell'una aumenta proporzionalmente anche l'altra o al diminuire dell'una diminuisce proporzionalmente anche l'altra.

Il costo unitario di una merce e la quantità di merce acquistata sono grandezze direttamente proporzionali.

Date due grandezze direttamente proporzionali, se una aumenta del doppio, del triplo, del quadruplo, ..., (o diminuisce della metà, di un terzo, ...), l'altra aumenta (o diminuisce) proporzionalmente nello stesso modo.

ESERCIZI SVOLTI

- Sono proporzionali il costo unitario di una merce e il peso della merce: se una certa merce costa x euro al kg, n chili della stessa merce costano $n \cdot x$ euro.

- Sono proporzionali lo spazio percorso da un'automobile a velocità costante e il tempo impiegato a percorrerlo: dalla relazione $v = \frac{s}{t}$ si deduce che $s = v \cdot t$ per cui, se la velocità è costante, all'aumentare del tempo corrisponde un aumento proporzionale dello spazio percorso.

- Se 6 pipistrelli mangiano 300 insetti in 5 ore, quanti insetti mangiano 6 pipistrelli in 15 ore?
  Il termine incognito si individua calcolando quanti insetti mangiano 6 pipistrelli in un'ora e moltiplicando il risultato per 15 ovvero risolvendo la proporzione: $300 : 5 = x : 15$.
  Se si calcola il termine incognito, si ottiene:
  $x = \frac{300 \cdot 15}{5} = 900$ quindi, se il numero di ore triplica ($5 \rightarrow 15$), il numero degli insetti triplica ($300 \rightarrow 900$).

DEFINIZIONE

Due grandezze, i cui valori dipendono l'uno dall'altro, sono **inversamente proporzionali** se all'aumentare dell'una diminuisce proporzionalmente anche l'altra e viceversa.

Il numero di lavoratori e il tempo impiegato per eseguire un certo lavoro sono grandezze inversamente proporzionali: se per eseguire un certo lavoro sono necessarie h ore e x lavoratori, un lavoratore impiegherebbe $h \cdot x$ ore per eseguire lo stesso lavoro, quindi al diminuire dei lavoratori corrisponde un aumento proporzionale di ore.

Siano A e B due grandezze inversamente proporzionali.

Se A aumenta e diventa il doppio, il triplo, il quadruplo, ..., di se stessa, allora B diminuisce e diventa la metà, un terzo, un quarto ..., di se stessa.

Se A diminuisce, diventando la metà, un terzo, ..., di se stessa, allora B aumenta e diventa il doppio, il triplo, ..., di se stessa.

ESERCIZI SVOLTI

- La velocità per percorrere un rettilineo e il tempo necessario per raggiungere il traguardo sono inversamente proporzionali: dalla formula della velocità $v = \frac{s}{t}$ si deduce che, se il percorso ha lunghezza fissa, all'aumentare della velocità corrisponde una diminuzione del tempo.

- Se 6 muratori scavano una buca in 12 ore, quanto tempo impiegherebbero 24 uomini per scavare la stessa buca?
  Il problema si risolve calcolando quanto tempo impiegherebbe a scavare la buca un solo muratore e calcolandolo per 24 (uomini) ovvero risolvendo la proporzione: $24 : 6 = 12 : x$. Se si calcola il termine incognito, si ottiene: $x = \frac{6 \cdot 12}{24} = 3$ quindi, se il numero dei lavoratori quadruplica, il tempo per eseguire il lavoro si riduce di un quarto.

Funzioni

Molte situazioni portano all'aggregazione tra elementi di due insiemi in modo da formare coppie ordinate.

Se si associa la propria pagella scolastica a ogni studente della 1 C, ad esempio, si formano delle coppie ordinate. Si dice allora che esiste una relazione tra l'insieme S degli studenti della 1 C e l'insieme P delle pagelle.

DEFINIZIONE

Una relazione $\mathfrak{R}$, definita da un insieme A a un insieme B, individua delle coppie $(x; y)$ in cui il primo elemento appartiene all'insieme A e il secondo all'insieme B.

L'elemento y prende il nome di **immagine** di y, mentre x è la **controimmagine** di y.
In simboli, per indicare che due elementi x e y si corrispondono in una relazione $\mathfrak{R}$, si scrive: $x\mathfrak{R}y$.

DEFINIZIONE

Una relazione che a ogni elemento di A associa uno e un solo elemento di B è detta **funzione**.

Quando i valori di y corrispondono ai valori di x e seguono una legge matematica, si dice che y è **funzione algebrica** di x.
$y = f(x)$ è l'**equazione della funzione** $f(x)$ ed esprime il legame tra x e y.

Funzioni lineari

Una **funzione** si dice **lineare** se la sua equazione assume la forma: $y = mx + q$, con m e q numeri reali.

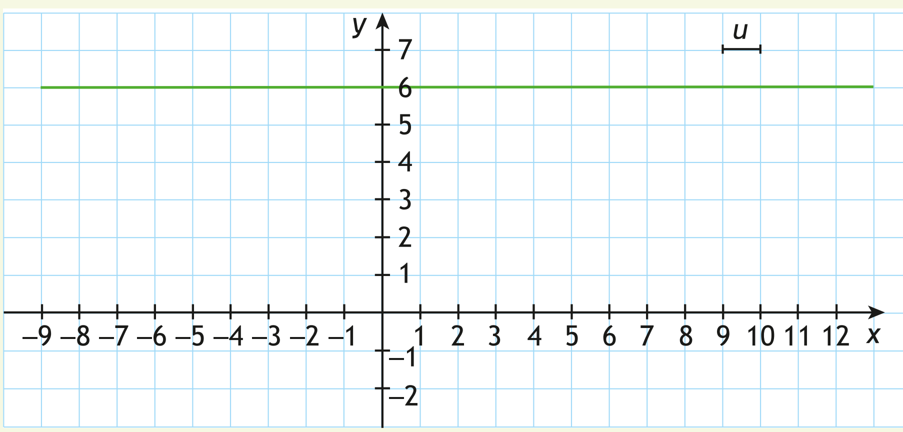
$y = 2x + 1$, $y = 8x$, $y = 7$
rappresentano funzioni lineari.

Se $m = 0$ e $q \neq 0$, l'equazione $y = mx + q$ assume la forma $y = q$. A qualsiasi valore attribuito alla x corrisponde lo stesso valore di y. Per questo, la funzione è detta **costante** e la sua rappresentazione grafica è una retta orizzontale, parallela all'asse x.

Se $q = 0$, l'equazione $y = mx + q$ assume la forma $y = mx$.

ESERCIZI SVOLTI

Il seguente grafico rappresenta la funzione costante di equazione $y = 6$.



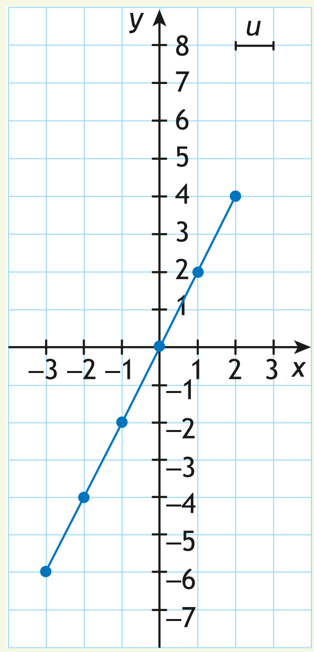
Sia data la funzione di equazione $y = 2x$.
Si costruisca una tabella di corrispondenza tra i valori di x e quelli di y, secondo la funzione lineare di equazione $y = 2x$. Si attribuiscano dei valori arbitrari alla x, si sostituiscano alla x, si eseguano le operazioni indicate per ricavare i valori corrispondenti di y:

x	y
–3	–6
–2	–4
–1	–2
0	0
1	2
2	4

Si rappresentino e si congiungano nel piano cartesiano i punti aventi per coordinate le coppie di numeri ottenute:

(–3; –6), (–2; –4), (–1; –2), (0; 0), (1; 2), (2; 4).

Si ottiene il seguente grafico:

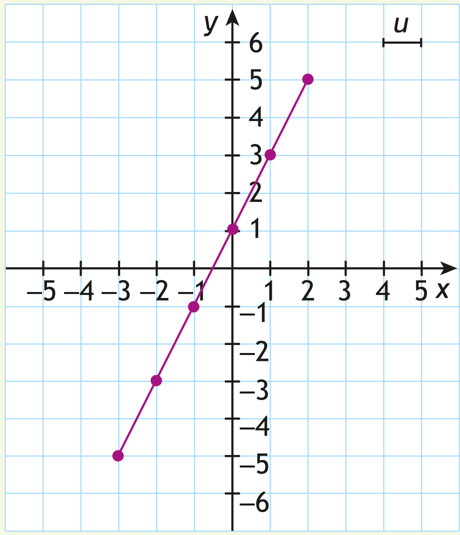


Il grafico della funzione lineare è una retta passante per l'origine *O*: se nell'equazione di una retta il termine noto è uguale a 0, la retta passa per l'origine.

Si prenda in esame la funzione di equazione $y = 2x + 1$.
Si costruisca una tabella di corrispondenza tra i valori di *x* e quelli di *y*, come per l'esempio precedente:

x	*y*
–3	–5
–2	–3
–1	–1
0	1
1	3
2	5

Si rappresentino e si congiungano nel piano cartesiano i punti aventi per coordinate le coppie di numeri ottenute: (–3; –5), (–2; –3), (–1; –1), (0; 1), (1; 3), (2; 5).



Se si osserva la rappresentazione grafica, $y = 2x + 1$ risulta "spostata" di un segmento lungo un'unità sull'asse y, verso l'alto, rispetto al grafico di $y = 2x$.

$y = 2x + 3$, $y = 2x + 4$, $y = 2x + 6$ rappresentate in un piano cartesiano, risultano spostate rispettivamente di 3, 4, 6 unità **verso l'alto** (termini noti positivi).

$y = 2x - 2$, $y = 2x - 3$, $y = 2x - 4$ risultano spostate rispettivamente di 2, 3, 4 unità **verso il basso** (termini noti negativi).