



CORSO DI MATEMATICA

MARIOLINA CAPPADONNA
PIERPAOLO DESTRI

_2

PER L'ISTRUZIONE E LA FORMAZIONE
PROFESSIONALE

Edizione **OPENSCHOOL**

1	LIBRODITESTO
2	E-BOOK+
3	RISORSEONLINE
4	PIATTAFORMA

HOEPLI

MARIOLINA CAPPADONNA

PIERPAOLO DESTRI

Corso di matematica

Per l'Istruzione
e la Formazione Professionale

VOLUME 2



EDITORE ULRICO HOEPLI MILANO

Copyright © Ulrico Hoepli Editore S.p.A. 2019

Via Hoepli 5, 20121 Milano (Italy)

tel. +39 02 864871 – fax +39 02 8052886

e-mail hoepli@hoepli.it

www.hoepli.it



Tutti i diritti sono riservati a norma di legge
e a norma delle convenzioni internazionali

Indice

Presentazione		IX
1	Numeri	1
1.1	Ripasso	1
	I numeri naturali	2
	Le frazioni	2
	I numeri con segno	3
	Numeri reali	3
	Mappa	5
	Verifica delle abilità	6
2	Funzioni	8
2.1	Proporzioni	8
	Proporzioni	8
	Proprietà delle proporzioni numeriche	9
	Serie di rapporti uguali	11
	Grandezze	12
	Grandezze proporzionali	12
	Funzioni	14
	Funzioni lineari	15
	Funzione di proporzionalità diretta	18
	Funzione di proporzionalità inversa	18
	Funzione di proporzionalità quadratica	19
	Funzioni empiriche	22
	Mappa	23
	Verifica delle abilità	24
	Verifica delle abilità - BES	30
3	Equazioni di primo grado	31
3.1	Equazioni	31
	Equazioni numeriche intere	31
	Principi di equivalenza delle equazioni	32
	Grado di un'equazione	32

	Risoluzione di un'equazione numerica intera di primo grado	33
	Equazioni numeriche frazionarie	34
	Risoluzione di un'equazione numerica frazionaria	34
	Problemi in un'incognita	35
	Risoluzione di un'equazione letterale	37
	Mappa	41
	Verifica delle abilità	42
	Verifica delle abilità - BES	52
4	Sistemi di equazioni di primo grado	53
4.1	I sistemi di equazioni di primo grado	53
	Sistemi di equazioni	53
	Sistemi numerici interi di primo grado in due incognite	53
	Risoluzione di un sistema di primo grado di due equazioni in due incognite	54
	METODO DELLA SOSTITUZIONE	54
	METODO DEL CONFRONTO	56
	METODO DELLA RIDUZIONE	58
	METODO DI CRAMER	60
	Problemi lineari in due incognite	66
	Risoluzione di un sistema numerico intero di primo grado costituito da tre equazioni nelle stesse incognite	68
	Mappa	70
	Verifica delle abilità	71
	Verifica delle abilità - BES	75
5	Disequazioni di primo grado	76
5.1	Disequazioni	76
	Le disuguaglianze e loro proprietà	76
	PROPRIETÀ	76
	Le disequazioni	77
	Principi di equivalenza	78
	PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA	78
	SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA	78
	TERZO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA	78
	Risoluzione di una disequazione di primo grado intera	79
	Disequazioni frazionarie	80
	Risoluzione di una disequazione frazionaria	81
	Mappa	84
	Verifica delle abilità	85
	Verifica delle abilità - BES	90
6	Radicali	91
6.1	I radicali	91
	La costruzione dei numeri reali	91

6.2	Radicali	91
	Proprietà invariante dei radicali	93
	Semplificazione di un radicale	93
	I radicali come potenze con esponente frazionario	94
	Riduzione di più radicali allo stesso indice	95
	Somma e differenza di radicali	96
	Prodotto di radicali	96
	Quoziente di due radicali	98
	Trasporto di un fattore dentro il segno di radice	99
	Trasporto di un fattore fuori dal segno di radice	100
	Elevamento a potenza	102
	Espressioni contenenti radicali	102
	Razionalizzazione del denominatore di una frazione	104
	Mappa	106
	Verifica delle abilità	107
	Verifica delle abilità - BES	113
7	Equazioni di secondo grado	114
7.1	Equazioni di secondo grado	114
	Equazioni numeriche intere di secondo grado in un'incognita	114
	Equazioni monomie	114
	Equazioni pure e spurie	115
	Equazioni spurie	117
	Equazioni complete	118
	Equazioni frazionarie	120
	Risoluzione di un'equazione frazionaria	121
	Problemi di secondo grado in un'incognita	122
	Mappa	124
	Verifica delle abilità	125
	Verifica delle abilità - BES	130
8	Sistemi di equazioni di secondo grado	131
8.1	Sistemi di equazioni di secondo grado	131
	Risoluzione di un sistema di secondo grado	131
	Problemi di secondo grado	134
	Mappa	135
	Verifica delle abilità	136
	Verifica delle abilità - BES	138
9	Disequazioni di secondo grado	139
9.1	Disequazioni di secondo grado	139
	Disequazioni di secondo grado intere	139
9.2	Disequazioni frazionarie	143

	Mappa	146
	Verifica delle abilità	147
	Verifica delle abilità - BES	150
10	Equazioni di grado superiore al secondo	151
10.1	Equazioni risolvibili mediante scomposizioni	151
10.1	Equazioni risolvibili mediante il ricorso a una variabile ausiliaria	152
10.1	Equazioni monomie	153
10.1	Equazioni binomie	154
10.1	Equazioni trinomie	155
	Mappa	156
	Verifica delle abilità	157
	Verifica delle abilità - BES	160
11	Disequazioni risolvibili con il metodo della scomposizione	161
	Disequazioni di grado superiore al primo	161
	Verifica delle abilità	164
	Verifica delle abilità - BES	165
12	Equazioni e disequazioni esponenziali	166
12.1	Semplici equazioni esponenziali	166
12.2	Semplici disequazioni esponenziali	167
	Mappa	169
	Verifica delle abilità	170
13	Piano cartesiano	171
13.1	Funzioni nel piano cartesiano	171
	Coordinate di un punto	171
	Segno delle coordinate di un punto del piano cartesiano	172
	Distanza tra due punti di un piano cartesiano	173
	Punto medio di un segmento	175
13.2	La retta	176
	Equazione di una retta	176
	Forma esplicita e forma implicita dell'equazione di una retta	178
	Equazione dell'asse x	179
	Equazione dell'asse y	179
	Equazione di una retta parallela a uno degli assi	179
	Equazione di una retta passante per l'origine	180
	Rappresentazione grafica di una retta	181
	Il segno del coefficiente angolare	185
	Risoluzione grafica di un sistema di equazioni numeriche intere di primo grado	186
	I coefficienti angolari di due rette parallele	189

	I coefficienti angolari di due rette perpendicolari	190
	Il coefficiente angolare di una retta in funzione delle coordinate di due suoi punti	190
	Equazione della retta passante per un punto e avente coefficiente angolare assegnato	191
	Equazione della retta passante per due punti	192
	Equazione della retta passante per un punto e che verifica un'altra condizione	192
	Distanza tra un punto e una retta	193
13.3	Luoghi geometrici	194
	Equazione di un luogo geometrico	194
	Condizioni di appartenenza	194
	Le coniche	195
13.4	La circonferenza	195
	La circonferenza come luogo geometrico	195
	Equazione cartesiana di una circonferenza	196
	Casi particolari	197
	Posizioni reciproche di una retta e di una circonferenza	199
13.5	La parabola	201
	La parabola come luogo geometrico	201
	Equazione cartesiana di una parabola avente asse parallelo all'asse y	201
	Concavità di una parabola	204
	Dall'equazione al grafico di una parabola avente asse parallelo all'asse y	205
	Posizioni reciproche di una retta e di una parabola	206
	Risoluzione grafica di un'equazione numerica intera di secondo grado	208
	Proporzionalità diretta	209
	Proporzionalità quadratica	210
	Proporzionalità inversa	211
	Mappa	212
	Verifica delle abilità	213
	Verso la prova INVALSI	232
	Verifica delle abilità - BES	239
14	Elementi di trigonometria	242
14.1	Le funzioni goniometriche	242
	Misura degli angoli: sistema sessagesimale	242
	Misura degli angoli: sistema radiale	243
	La circonferenza goniometrica	245
	Funzioni goniometriche	246
	Variazioni delle funzioni goniometriche	246
	Rappresentazione grafica delle funzioni goniometriche seno, coseno, tangente	249
	Uso della calcolatrice scientifica	250
	La funzione goniometrica cotangente	250
	Valori delle funzioni goniometriche di alcuni angoli particolari	251
	Le relazioni fondamentali	253
14.2	Archi e angoli associati	256
	Riduzione al primo quadrante	256
	Angoli supplementari	256
	Angoli complementari	257
	Angoli esplementari	258
	Angoli opposti	259

	Angoli che differiscono di un angolo piatto	260
	Angoli che differiscono di un angolo giro	261
14.3	La trigonometria e i triangoli	262
	Triangoli qualsiasi	264
	Tabella riepilogativa	266
	Mappa	270
	Verifica delle abilità	271
15	Calcolo infinitesimale	274
15.1	Funzioni	274
	Intervalli numerici	274
	Funzioni	275
	Dominio di una funzione razionale	276
	Codominio di una funzione	277
	Segno di una funzione	278
	Funzioni crescenti, funzioni decrescenti	279
	Minimo e massimo di una funzione	280
	Flessi	281
	Grafico di una funzione	282
15.2	Limite di una funzione	284
	Limite finito per x che tende ad un valore finito	284
	Limite infinito per x che tende ad un valore finito	286
	Limite infinito per x che tende a infinito	287
	Limite finito per x che tende a infinito	287
	Operazioni con i limiti e forme indeterminate	288
	Asintoti di una funzione	292
	Funzioni continue	294
	Discontinuità di prima specie	294
	Discontinuità di seconda specie	295
	Discontinuità di terza specie	297
15.3	Derivata di una funzione	298
	Tavola delle principali regole di derivazione di funzioni algebriche	300
15.4	Successioni	301
	Verifica delle abilità	303
	Come utilizzare il coupon per scaricare la versione digitale del libro	310
	Come utilizzare il coupon per scaricare i contenuti digitali integrativi	310

Presentazione

Il libro si presenta come uno strumento agevole per l'apprendimento dei temi di matematica del biennio di un **corso di Istruzione e Formazione Professionale**. Il linguaggio utilizzato presenta in modo chiaro anche i contenuti concettualmente più impegnativi e, seppur semplice e scorrevole, risulta nel contempo rigoroso, tipico della disciplina.

I capitoli sono così strutturati:

- breve introduzione di un nuovo argomento;
- esercizio svolto, per meglio apprendere la parte teorica;
- mappa concettuale, per sintetizzare i concetti e le procedure fondamentali e per agevolare l'apprendimento degli studenti con bisogni educativi speciali;
- esercizi proposti strutturati in funzione del loro grado di difficoltà, da svolgere in modo autonomo, identificati come “verifica delle abilità”;
- esercizi proposti, da svolgere in modo autonomo, scritti con font ad alta leggibilità, per agevolare gli allievi con disturbi specifici dell'apprendimento.

Definizioni, proprietà, teoremi, osservazioni, regole e suggerimenti sono evidenziati all'interno di box colorati.

In fondo ai capitoli sono inserite delle mappe inclusive, utili quindi a tutti gli studenti, non solo a quelli con bisogni educativi speciali.

Le nozioni fondamentali e le verifiche delle abilità sono scritte con font ad alta leggibilità, al fine di abbattere le barriere di ostacolo all'accesso e alla comprensione dei contenuti. La proposta di esercizi è ricca e costituisce parte integrante della trattazione. Dopo ogni nuovo concetto, definizione, proprietà è presente un box colorato al cui interno ogni passaggio è spiegato passo passo. Gli esercizi proposti sono presentati in funzione del loro grado di difficoltà.

Un puntino colorato accanto al numero indica un esercizio di difficoltà maggiore rispetto a quello senza contrassegno; due puntini indicano gli esercizi più impegnativi. La gradualità consente non solo di accompagnare l'allievo ad apprendere con agevolezza i contenuti, ma anche di consolidare quanto appreso.

La *Guida per il docente* raccoglie riferimenti normativi, utili informazioni su diverse metodologie da adottare nella didattica di tutti i giorni, utili suggerimenti e spunti relativi alla didattica per studenti con bisogni educativi speciali, tutte le soluzioni degli esercizi, una sezione di aiuto per studenti con disturbi specifici dell'apprendimento, delle verifiche di abilità su ogni capitolo.

L'OFFERTA DIDATTICA HOEPLI

L'edizione **Openschool** Hoepli offre a docenti e studenti tutte le potenzialità di Openschool Network (ON), il nuovo sistema integrato di contenuti e servizi per l'apprendimento.

Edizione **OPENSCHOOL**



LIBRO DI TESTO



Il libro di testo è l'**elemento cardine** dell'offerta formativa, uno strumento didattico **agile** e **completo**, utilizzabile **autonomamente** o in combinazione con il ricco **corredo digitale** offline e online. Secondo le più recenti indicazioni ministeriali, volume cartaceo e apparati digitali **sono integrati in un unico percorso didattico**. Le espansioni accessibili attraverso l'eBook+ e i materiali integrativi disponibili nel sito dell'editore sono puntualmente richiamati nel testo tramite apposite icone.

eBOOK+



L'**eBook+** è la versione digitale e interattiva del libro di testo, utilizzabile su **tablet, LIM e computer**. Aiuta a comprendere e ad approfondire i contenuti, rendendo l'apprendimento più attivo e coinvolgente. Consente di leggere, annotare, sottolineare, effettuare ricerche e accedere direttamente alle numerose **risorse digitali integrative**.
→ Scaricare l'eBook+ è molto **semplice**. È sufficiente seguire le istruzioni riportate nell'ultima pagina di questo volume.

RISORSE ONLINE



Il sito della casa editrice offre una ricca dotazione di **risorse digitali** per l'approfondimento e l'aggiornamento. Nella pagina web dedicata al testo è disponibile **my BookBox**, il contenitore virtuale che raccoglie i materiali integrativi che accompagnano l'opera.
→ Per accedere ai materiali è sufficiente registrarsi al sito **www.hoepliscuola.it** e inserire il codice coupon che si trova nell'ultima pagina di questo volume. **Per il docente** nel sito sono previste ulteriori risorse didattiche dedicate.

PIATTAFORMA DIDATTICA



La **piattaforma didattica** è un ambiente digitale che può essere utilizzato in modo duttile, a misura delle esigenze della classe e degli studenti. Permette in particolare di **condividere contenuti** ed **esercizi** e di partecipare a **classi virtuali**. Ogni attività svolta viene salvata sul **cloud** e rimane sempre disponibile e aggiornata. La piattaforma consente inoltre di consultare la versione online degli eBook+ presenti nella propria libreria.
→ È possibile accedere alla piattaforma attraverso il sito **www.hoepliscuola.it**.

1.1 Ripasso

I numeri naturali

L'insieme dei **numeri naturali** viene indicato con N . Esso indica l'insieme $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Ogni numero naturale diverso da 0 possiede:

- il precedente, ossia il numero che lo precede di un'unità;
- il successivo, ossia il numero che lo segue di un'unità.

È sempre possibile confrontare due numeri naturali tra loro, quindi stabilire quale relazione d'ordine esiste tra loro: un numero naturale diverso da zero è maggiore del suo precedente e minore del suo successivo.

Il minimo comune multiplo di più numeri è il più piccolo dei multipli comuni dei numeri. Esso si indica con la sigla **mcm** ed è uguale al prodotto dei fattori primi comuni e non comuni, presi una sola volta e con il maggior esponente.

Il Massimo Comun Divisore di più numeri è il più grande dei divisori comuni dei numeri. Esso si indica con la sigla **MCD** ed è uguale al prodotto dei fattori primi comuni, presi una sola volta e con il minor esponente.

Con i numeri naturali è sempre possibile eseguire l'addizione e la moltiplicazione. Per eseguire la divisione è necessario ampliare l'insieme N , passando all'insieme Q .

Le frazioni

Il quoziente della divisione tra due numeri naturali a e b , con $b \neq 0$, è anche detto **rapporto** tra a e b .

Una **frazione** $\frac{a}{b}$ è il rapporto tra due numeri naturali a e b , di cui il secondo è diverso da zero ($b \neq 0$).

Le frazioni si suddividono in:

- proprie, in cui il numeratore è minore del denominatore;
- improprie, in cui il numeratore è maggiore del denominatore;
- apparenti, in cui il numeratore è multiplo del denominatore.

Tutti i numeri che possono essere espressi da una frazione sono detti numeri **razionali**. L'insieme dei numeri razionali viene indicato con Q .

La divisione tra il numeratore e il denominatore di una frazione, quando l'uno non è multiplo dell'altro, genera un **numero decimale**, costituito da due parti separate tra loro da una virgola.

La parte che precede la virgola è denominata parte intera del numero decimale; l'altra è la parte decimale.

Se la parte decimale ha un numero **finito** di cifre, il numero decimale è detto **finito**; altrimenti il numero decimale è infinito o illimitato.

Una frazione che contiene al denominatore potenze del 10 ed è ridotta ai minimi termini è detta **decimale**.

Per trovare il numero decimale finito generato da una frazione decimale, si scrive il numeratore e si sposta la virgola verso sinistra di tanti posti quanti sono gli zeri contenuti al denominatore.

Una frazione il cui denominatore contiene come fattori primi solo il 2, solo il 5 o solo entrambi genera un numero decimale finito. Per individuarlo, basta dividere il numeratore per il denominatore.

La frazione generatrice di un numero decimale finito possiede:

- al numeratore il numero privato della virgola e degli 0 finali della parte decimale;
- al denominatore il 10 elevato al numero di cifre decimali presenti nel numero.

Sono esclusi dal conteggio gli 0 finali della parte decimale.

Fra i numeri decimali illimitati si possono distinguere quelli periodici nei quali, dopo la virgola, esiste un gruppo di cifre che continuano a ripetersi, denominato periodo.

I numeri periodici si dividono in **periodici semplici** e **periodici misti**, a seconda che il periodo si trovi immediatamente dopo la virgola o se tra la virgola e il periodo ci sono altre cifre dette antiperiodo.

Una frazione irriducibile genera un numero periodico semplice se il suo denominatore non contiene come fattori primi né il 2, né il 5.

La frazione generatrice di un numero periodico semplice possiede:

- al numeratore la differenza di tutte le cifre del numero, privato della virgola e del trattino, con la parte intera;
- al denominatore tanti 9 quante sono le cifre che costituiscono il periodo.

Una frazione irriducibile genera un numero periodico misto se il suo denominatore contiene come fattori primi il 2 e altri numeri diversi da 5, il 5 e altri numeri diversi da 2 o il 2 e il 5 insieme ad altri numeri diversi da 2 e da 5.

La frazione generatrice di un numero periodico misto possiede:

- al numeratore la differenza del numero privato della virgola e del trattino con il numero formato da tutte le cifre intere e decimali che precedono il periodo (esclusi gli 0 iniziali della parte intera);
- al denominatore tanti 9 quante sono le cifre che costituiscono il periodo seguiti da tanti zeri quante solo le cifre dell'antiperiodo.

Un numero si dice scritto in **notazione scientifica** se è espresso sotto forma di prodotto $a \cdot 10^n$, con $1 \leq a < 10$.

Se un numero x è già compreso tra 1 e 10, $1 \leq x < 10$, la sua notazione scientifica è $x \cdot 10^0$.

Se un numero x non è compreso tra 1 e 10, si contano le posizioni N che servono per spostare la virgola e ottenere un numero a compreso tra 1 e 10 ossia tale che $1 \leq a < 10$.

Se la virgola deve essere spostata di N posizioni verso sinistra, si scrive il numero come prodotto di a per 10 elevato al numero N .

Se la virgola deve essere spostata di N posizioni verso destra, si scrive il numero come prodotto di a per 10 elevato a $-N$.

La notazione scientifica è utile per esprimere numeri molto grandi o molto piccoli e lavorare con essi mediante le proprietà delle potenze.

In N è sempre possibile eseguire l'addizione e la moltiplicazione. In Q è sempre possibile eseguire l'addizione, la moltiplicazione, la divisione tra due numeri razionali. Per eseguire la sottrazione è necessario un ampliamento, passando all'insieme Z dei numeri con segno.

I numeri con segno

L'insieme numerico che si costruisce a partire dall'insieme N , associando allo 0 se stesso e a ogni numero i due numeri che si ottengono facendolo precedere dal segno $+$ e dal segno $-$ è l'insieme Z . In modo analogo, è possibile costruire l'insieme Q_+ delle frazioni positive (precedute dal $+$) e l'insieme Q_- delle frazioni negative (precedute dal segno $-$) e dallo 0.

Un numero preceduto dal segno $+$ è un numero **positivo**. Un numero preceduto dal segno $-$ è un numero **negativo**. Allo 0 non si attribuisce alcun segno.

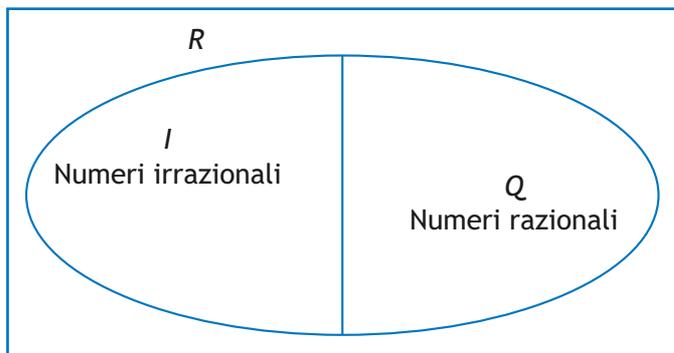
Numeri che hanno lo stesso segno sono denominati **concordi**; numeri aventi segno opposto sono **discordi**. Due numeri aventi segno diverso e ottenuti dallo stesso numero naturale sono denominati **opposti**.

Numeri reali

L'insieme dei numeri decimali illimitati non periodici, che **non** possono essere espressi come numeri razionali, prende il nome di **insieme I dei numeri irrazionali**.

Aritmetica

L'insieme costituito dall'unione dell'insieme dei numeri razionali Q con I prende il nome di **insieme R dei numeri reali**.



Esso è costituito da tutti i numeri interi (positivi e negativi), dallo zero, dalle frazioni $\frac{a}{b}$ che si costruiscono con numeri interi a e b , con $b \neq 0$ e, infine, dai numeri irrazionali.

L'insieme R è l'insieme numerico che contiene tutti gli altri insiemi numerici sin qui studiati.

Mappa

Operazioni tra numeri con segno

Addizione

$$(+2) + (+3) = +5$$

$$(+2) + (-3) = -1$$

$$(-2) + (-3) = -5$$

$$(-2) + (+3) = +1$$

Sottrazione

$$(+2) - (-3) = +5$$

$$(+2) - (+3) = -1$$

Divisione

$$(+2) : (+3) = +\frac{2}{3}$$

$$(-2) : (-3) = +\frac{2}{3}$$

$$(+2) : (-3) = -\frac{2}{3}$$

$$(-2) : (+3) = -\frac{2}{3}$$

Moltiplicazione

$$(+)\cdot(+)=(+)$$

$$(-)\cdot(-)=(+)$$

$$(+)\cdot(-)=(-)$$

$$(-)\cdot(+)=(-)$$

$$(+2)\cdot(+3)=+6$$

$$(-2)\cdot(-3)=+6$$

$$(+2)\cdot(-3)=-6$$

$$(-2)\cdot(+3)=-6$$

Proprietà delle potenze

$$2^5 \cdot 2^4 = 2^{5+4} = 2^9$$

$$2^5 : 2^4 = 2^{5-4} = 2^1 = 2$$

$$3^2 \cdot 2^2 = (3 \cdot 2)^2 = 6^2 = 36$$

$$5^2 : 3^2 = (5 : 3)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

$$(2^2)^3 = 2^6 = 64$$

Verifica delle abilità

Calcolare il MCD e il mcm dei seguenti numeri.

1. 220; 1100; 75; 120; 320

Individuare le frazioni che generano i seguenti numeri decimali.

2. $2,\overline{6}$

3. $0,01\overline{7}$

4. $0,00\overline{7}$

Stabilire se le seguenti frazioni generano un numero decimale finito, periodico semplice o periodico misto.

5. $\frac{11}{7}$

6. $\frac{7}{4}$

7. $\frac{13}{6}$

Tradurre le seguenti frasi in espressioni e calcolare poi il risultato.

8. Il prodotto tra il precedente di 3 e la differenza di dodici con cinque.

9. Il prodotto tra il successivo di -41 e la differenza di -15 con $+5$ diviso il quadrato di -20 .

10. Dividere per il cubo di -2 il quadrato della moltiplicazione per -2 della divisione tra -120 e la differenza di -36 e -6 .

Calcolare le seguenti espressioni.

11. $\left(2 - \frac{6}{4}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{12}{23}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2$

12. $\left\{ \left[\frac{1}{2} + 5 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) \right] \cdot \left(1 - \frac{3}{7}\right) \right\} : \left[\frac{1}{6} - \frac{2}{3} + 2 \right] - \frac{2}{3^2}$

13. $\left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\left(\frac{7}{4} - 1 \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5} \right) - \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2} \right) \right) \right] - \frac{1}{60} \right\} : \left(\frac{5}{2} \right)^2 \cdot \frac{15}{2}$

14. $[(+3)^3 : (-2 + 5)^2 - 5] : (-2)$

15. $[(-2)^2 \cdot (-3)^2 + 2^3 \cdot (3^2 - 1) : 2^4 + (-3)^2] : [(-2) \cdot (-5) - 13 + 10]$

16. $(-3) \cdot [(-5)^2 : (-5) + 5 \cdot (-3) \cdot (-1)] : [-1 + (-2)^3(-2)^5 : (-2)^6]$

$$17. [(-2)^2 \cdot (1 - 3^2) : (-2)^4 - (-2)^2 \cdot (-3)^2 - (-2)^3] : [(-3) \cdot (-5) - 5 + (-2)^2 \cdot (+5)]$$

$$18. \{[(-7^3)^2 : (-2 - 5)^5 - 7] : (-2) + 3 \cdot [-15 : (-5) + 2 \cdot 3 \cdot (-1)]\} : (-2)$$

$$19. \left[\left(4 - \frac{19}{5} \right)^2 : \left(2 - \frac{7}{5} \right) \right] : \left(-\frac{2}{3} \right)$$

$$20. \left(-2 + \frac{5}{4} \right)^3 : \left(-\frac{3}{4} \right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2^2} \right)$$

$$21. \left[\left(-2 + \frac{6}{5} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{4} \right)^2 \right] : \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{4} \right)$$

2.1 Proporzioni

Proporzioni



DEFINIZIONE

Una **proporzione** numerica è un'uguaglianza vera tra due rapporti.

$$\underline{7 : 8} = \underline{28 : 32}$$

↖

“7 sta a 8”

↗

“28 sta a 32”

“7 sta a 8” come “28 sta a 32”

Nella proporzione $a : b = c : d$

- a, b, c, d sono i termini;
- a e d sono gli estremi;
- b e c sono i medi;
- a e c sono gli antecedenti;
- b e d sono i conseguenti.
- d è il quarto proporzionale.

Se i medi di una proporzione numerica sono uguali, la proporzione si dice **continua** e ciascun medio prende il nome di medio proporzionale.



ESERCIZI SVOLTI

- $5 : 3 = 10 : 6$ è una proporzione. 5 e 6 sono gli estremi, 3 e 10 i medi, 5 e 10 gli antecedenti, 3 e 6 i conseguenti.
- Nella proporzione continua $6 : 24 = 24 : 96$, 24 è il medio proporzionale.

Proprietà delle proporzioni numeriche

In una proporzione numerica $a : b = c : d$ sono valide le seguenti proprietà:

■ Proprietà fondamentale

Il prodotto dei medi di una proporzione è uguale al prodotto degli estremi.

Nella proporzione $5 : 2 = 15 : 6$ il prodotto dei medi $2 \cdot 15 = 30$ è uguale al prodotto degli estremi $5 \cdot 6 = 30$.

Di conseguenza:

- un estremo è uguale al prodotto dei medi diviso l'altro estremo:

$$5 = \frac{2 \cdot 15}{6} \text{ e } 6 = \frac{2 \cdot 15}{5};$$

- un medio è uguale al prodotto degli estremi diviso l'altro medio:

$$2 = \frac{5 \cdot 6}{15} \text{ e } 15 = \frac{5 \cdot 6}{2}.$$

- Per la proprietà fondamentale, in una proporzione continua, il medio proporzionale è uguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi.

Nella proporzione $12 : 6 = 6 : 3$, il medio $6 = \sqrt{12 \cdot 3}$.

■ Proprietà del permutare

Scambiando fra loro i medi o fra loro gli estremi di una proporzione, si ottiene ancora una proporzione.

Nella proporzione $5 : 2 = 15 : 6$, se si scambiano fra loro i medi: $5 : 15 = 2 : 6$ o fra loro gli estremi: $6 : 2 = 15 : 5$, si ottiene ancora una proporzione.

■ Proprietà dell'invertire

Scambiando fra loro ogni antecedente con il suo conseguente, si ottiene ancora una proporzione.

Nella proporzione $5 : 2 = 15 : 6$, scambiando fra loro ogni antecedente con il suo conseguente: $2 : 5 = 6 : 15$, si ottiene ancora una proporzione.

■ Proprietà del comporre

Sostituendo a ogni antecedente la somma di quest'ultimo con il suo conseguente, si ottiene ancora una proporzione.

Nella proporzione $5 : 2 = 15 : 6$

$$(5 + 2) : 2 = (15 + 6) : 6 \rightarrow 7 : 2 = 21 : 6$$

Sostituendo a ogni antecedente la somma di quest'ultimo con il suo conseguente e a ogni conseguente il suo antecedente, si ottiene ancora una proporzione.

$$(5 + 2) : 5 = (15 + 6) : 15 \rightarrow 7 : 5 = 21 : 15$$

Di conseguenza, la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come ogni antecedente sta al suo conseguente:

$$(5 + 15) : (2 + 6) = 5 : 2 \text{ e } (5 + 15) : (2 + 6) = 15 : 6$$

■ **Proprietà dello scorporre**

Sostituendo a ogni antecedente la differenza di quest'ultimo con il suo conseguente, si ottiene ancora una proporzione.

$$5 : 2 = 15 : 6 \rightarrow (5 - 2) : 2 = (15 - 6) : 6$$

Sostituendo a ogni antecedente la differenza di quest'ultimo con il suo conseguente e a ogni conseguente il suo antecedente, si ottiene ancora una proporzione.

$$5 : 2 = 15 : 6 \rightarrow (5 - 2) : 5 = (15 - 6) : 15$$



ESERCIZI SVOLTI

- Il termine incognito della proporzione numerica $12 : 34 = 30 : x$ è

$$x = \frac{34 \cdot 30}{12} = 85.$$
- Il termine incognito della proporzione numerica $12 : x = 36 : 72$ è

$$x = \frac{12 \cdot 72}{36} = 24.$$
- Il quarto proporzionale della proporzione numerica $5 : 20 = 20 : x$ è

$$x = \frac{20^2}{5} = 80.$$
- Il medio proporzionale della proporzione numerica $5 : x = x : 125$ è

$$x = \sqrt{5 \cdot 125} = \sqrt{625} = 25.$$
- Il medio proporzionale della proporzione numerica $5 : x = x : 12$ non esiste in Q perché in Q non esiste la radice quadrata di 60:

$$5 : x = x : 12 \rightarrow x^2 = 5 \cdot 12 \rightarrow x^2 = 60.$$

Serie di rapporti uguali

Una **serie di rapporti uguali** è l'uguaglianza di più rapporti.

Presi in considerazione i rapporti uguali:

$$45 : 3 = 15 \quad 30 : 2 = 15 \quad 60 : 4 = 15 \quad 120 : 8 = 15$$

Sarà possibile scrivere la serie di rapporti uguali:

$$45 : 3 = 30 : 2 = 60 : 4 = 120 : 8$$

■ Proprietà di una serie di rapporti uguali

La somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come un antecedente sta al suo conseguente.

Presi in considerazione la serie di rapporti uguali.

$45 : 3 = 30 : 2 = 60 : 4 = 120 : 8$ si avrà:

$$(45 + 30 + 60 + 120) : (3 + 2 + 4 + 8) = 30 : 2 \quad \text{infatti } 255 : 17 = 30 : 2$$

oppure

$$(45 + 30 + 60 + 120) : (3 + 2 + 4 + 8) = 60 : 4$$

oppure

$$(45 + 30 + 60 + 120) : (3 + 2 + 4 + 8) = 120 : 8$$

La proprietà si rivela utile se in una catena di rapporti sono incogniti tutti gli antecedenti o tutti i conseguenti ed è nota la loro somma.



ESERCIZI SVOLTI

Sia data la serie di rapporti uguali: $x : 3 = y : 2 = z : 9$, con $x + y + z = 168$. È possibile applicare la proprietà:

$$(x + y + z) : (3 + 2 + 9) = x : 3$$

$$(x + y + z) : (3 + 2 + 9) = y : 2$$

$$(x + y + z) : (3 + 2 + 9) = z : 9$$

per cui:

$$168 : 14 = x : 3 \rightarrow x = \frac{168 \cdot 3}{14} = 36$$

$$168 : 14 = y : 2 \rightarrow y = \frac{168 \cdot 2}{14} = 24$$

$$168 : 14 = z : 9 \rightarrow z = \frac{168 \cdot 9}{14} = 108$$

Grandezze



DEFINIZIONE

Una **grandezza** è una proprietà di un elemento, di un ente, di un evento, di un fenomeno.

Tale proprietà è misurabile ossia confrontabile con una grandezza omogenea (dello stesso tipo), scelta come grandezza di riferimento. La grandezza di riferimento è detta **unità di misura**. L'operazione di confronto deve stabilire quante volte la grandezza di riferimento è uguale, minore o maggiore della grandezza da misurare. La **misura** di una grandezza è rappresentata da un valore numerico, seguito dal simbolo dell'unità di misura scelta per misurarla.

Alcune grandezze vengono misurate direttamente e, per questo, le loro misure sono dette **dirette**.

Altre necessitano di calcoli aggiuntivi e, per questo, le loro misure sono dette **indirette**.

Tra le misure dirette ci sono, ad esempio, il peso, che deve essere misurato con lo strumento *bilancia*, l'altezza che viene misurata con lo strumento *metro*. Misure come l'area rientrano tra quelle indirette.

Una grandezza si dice **costante** quando il suo valore non varia in diverse misurazioni. Si dice **variabile** quando assume valori diversi in misurazioni diverse.

Grandezze proporzionali



DEFINIZIONE

Due grandezze, i cui valori dipendono l'uno dall'altro, sono **direttamente proporzionali** se all'aumentare dell'una aumenta proporzionalmente anche l'altra o al diminuire dell'una diminuisce proporzionalmente anche l'altra.

Il costo unitario di una merce e la quantità di merce acquistata sono grandezze direttamente proporzionali.

Date due grandezze direttamente proporzionali, se una aumenta del doppio, del triplo, del quadruplo, ..., (o diminuisce della metà, di un terzo, ...), l'altra aumenta (o diminuisce) proporzionalmente nello stesso modo.



ESERCIZI SVOLTI

- Sono proporzionali il costo unitario di una merce e il peso della merce: se una certa merce costa x euro al kg, n chili della stessa merce costano $n \cdot x$ euro.
- Sono proporzionali lo spazio percorso da un'automobile a velocità costante e il tempo impiegato a percorrerlo: dalla relazione $v = \frac{s}{t}$ si deduce che $s = v \cdot t$ per cui, se la velocità è costante, all'aumentare del tempo corrisponde un aumento proporzionale dello spazio percorso.
- Se 6 pipistrelli mangiano 300 insetti in 5 ore, quanti insetti mangiano 6 pipistrelli in 15 ore?
Il termine incognito si individua calcolando quanti insetti mangiano 6 pipistrelli in un'ora e moltiplicando il risultato per 15 ovvero risolvendo la proporzione: $300 : 5 = x : 15$.
Se si calcola il termine incognito, si ottiene:
$$x = \frac{300 \cdot 15}{5} = 900$$
 quindi, se il numero di ore triplica ($5 \rightarrow 15$), il numero degli insetti triplica ($300 \rightarrow 900$).



DEFINIZIONE

Due grandezze, i cui valori dipendono l'uno dall'altro, sono **inversamente proporzionali** se all'aumentare dell'una diminuisce proporzionalmente anche l'altra e viceversa.

Il numero di lavoratori e il tempo impiegato per eseguire un certo lavoro sono grandezze inversamente proporzionali: se per eseguire un certo lavoro sono necessarie h ore e x lavoratori, un lavoratore impiegherebbe $h \cdot x$ ore per eseguire lo stesso lavoro, quindi al diminuire dei lavoratori corrisponde un aumento proporzionale di ore.

Siano A e B due grandezze inversamente proporzionali.

Se A aumenta e diventa il doppio, il triplo, il quadruplo, ..., di se stessa, allora B diminuisce e diventa la metà, un terzo, un quarto ..., di se stessa.

Se A diminuisce, diventando la metà, un terzo, ..., di se stessa, allora B aumenta e diventa il doppio, il triplo, ..., di se stessa.



ESERCIZI SVOLTI

- La velocità per percorrere un rettilineo e il tempo necessario per raggiungere il traguardo sono inversamente proporzionali: dalla formula della velocità $v = \frac{s}{t}$ si deduce che, se il percorso ha lunghezza fissa, all'aumentare della velocità corrisponde una diminuzione del tempo.
- Se 6 muratori scavano una buca in 12 ore, quanto tempo impiegherebbero 24 uomini per scavare la stessa buca?
Il problema si risolve calcolando quanto tempo impiegherebbe a scavare la buca un solo muratore e calcolandolo per 24 (uomini) ovvero risolvendo la proporzione: $24 : 6 = 12 : x$. Se si calcola il termine incognito, si ottiene: $x = \frac{6 \cdot 12}{24} = 3$ quindi, se il numero dei lavoratori quadruplica, il tempo per eseguire il lavoro si riduce di un quarto.

Funzioni

Molte situazioni portano all'aggregazione tra elementi di due insiemi in modo da formare coppie ordinate.

Se si associa la propria pagella scolastica a ogni studente della 1 C, ad esempio, si formano delle coppie ordinate. Si dice allora che esiste una relazione tra l'insieme S degli studenti della 1 C e l'insieme P delle pagelle.



DEFINIZIONE

Una relazione \mathfrak{R} , definita da un insieme A a un insieme B , individua delle coppie $(x; y)$ in cui il primo elemento appartiene all'insieme A e il secondo all'insieme B .

L'elemento y prende il nome di **immagine** di x , mentre x è la **controimmagine** di y .

In simboli, per indicare che due elementi x e y si corrispondono in una relazione \mathfrak{R} , si scrive: $x\mathfrak{R}y$.



DEFINIZIONE

Una relazione che a ogni elemento di A associa uno e un solo elemento di B è detta **funzione**.

Quando i valori di y corrispondono ai valori di x e seguono una legge matematica, si dice che y è **funzione algebrica** di x .

$y = f(x)$ è l'**equazione della funzione** $f(x)$ ed esprime il legame tra x e y .

Funzioni lineari

Una **funzione** si dice **lineare** se la sua equazione assume la forma: $y = mx + q$, con m e q numeri reali.

$y = 2x + 1$, $y = 8x$, $y = 7$
rappresentano funzioni lineari.

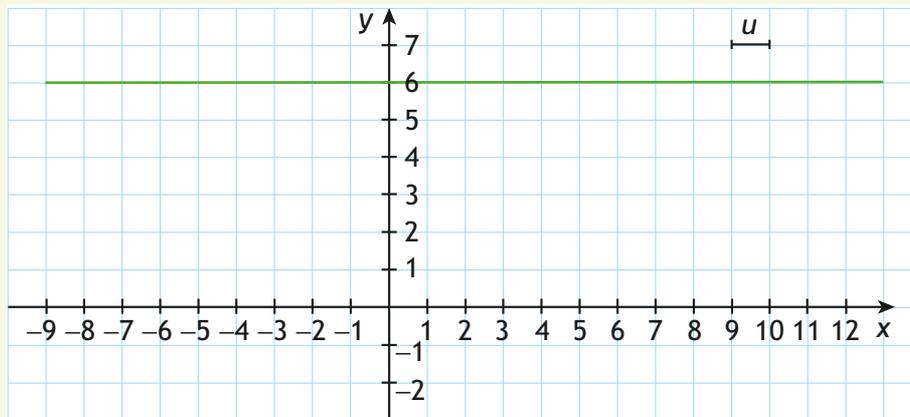
Se $m = 0$ e $q \neq 0$, l'equazione $y = mx + q$ assume la forma $y = q$. A qualsiasi valore attribuito alla x corrisponde lo stesso valore di y . Per questo, la funzione è detta **costante** e la sua rappresentazione grafica è una retta orizzontale, parallela all'asse x .

Se $q = 0$, l'equazione $y = mx + q$ assume la forma $y = mx$.



ESERCIZI SVOLTI

Il seguente grafico rappresenta la funzione costante di equazione $y = 6$.



Sia data la funzione di equazione $y = 2x$.

Si costruisca una tabella di corrispondenza tra i valori di x e quelli di y , secondo la funzione lineare di equazione $y = 2x$. Si attribuiscono dei valori arbitrari alla x , si sostituiscono alla x , si eseguano le operazioni indicate per ricavare i valori corrispondenti di y :

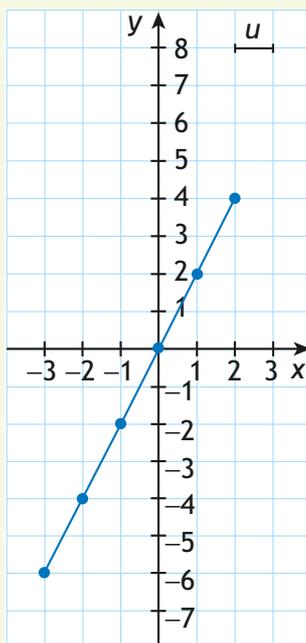
x	y
-3	-6
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4



Si rappresentino e si congiungano nel piano cartesiano i punti aventi per coordinate le coppie di numeri ottenute:

$(-3; -6)$, $(-2; -4)$, $(-1; -2)$, $(0; 0)$, $(1; 2)$, $(2; 4)$.

Si ottiene il seguente grafico:



Il grafico della funzione lineare è una retta passante per l'origine O : se nell'equazione di una retta il termine noto è uguale a 0 , la retta passa per l'origine.

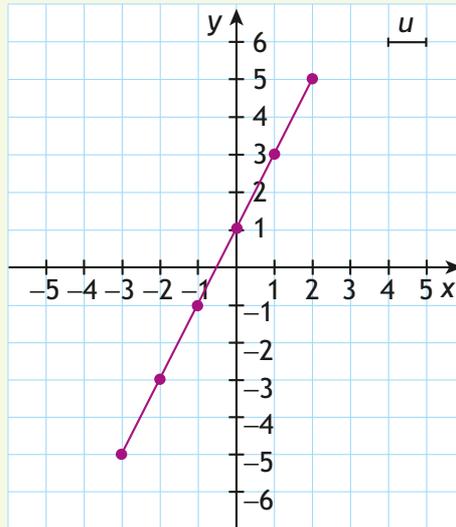
Si prenda in esame la funzione di equazione $y = 2x + 1$.

Si costruisca una tabella di corrispondenza tra i valori di x e quelli di y , come per l'esempio precedente:

x	y
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5



Si rappresentino e si congiungano nel piano cartesiano i punti aventi per coordinate le coppie di numeri ottenute: $(-3; -5)$, $(-2; -3)$, $(-1; -1)$, $(0; 1)$, $(1; 3)$, $(2; 5)$.



Se si osserva la rappresentazione grafica, $y = 2x + 1$ risulta “spostata” di un segmento lungo un’unità sull’asse y , verso l’alto, rispetto al grafico di $y = 2x$.

$y = 2x + 3$, $y = 2x + 4$, $y = 2x + 6$
rappresentate in un piano cartesiano, risultano spostate rispettivamente di 3, 4, 6 unità **verso l’alto** (termini noti positivi).

$y = 2x - 2$, $y = 2x - 3$, $y = 2x - 4$
risultano spostate rispettivamente di 2, 3, 4 unità **verso il basso** (termini noti negativi).

