

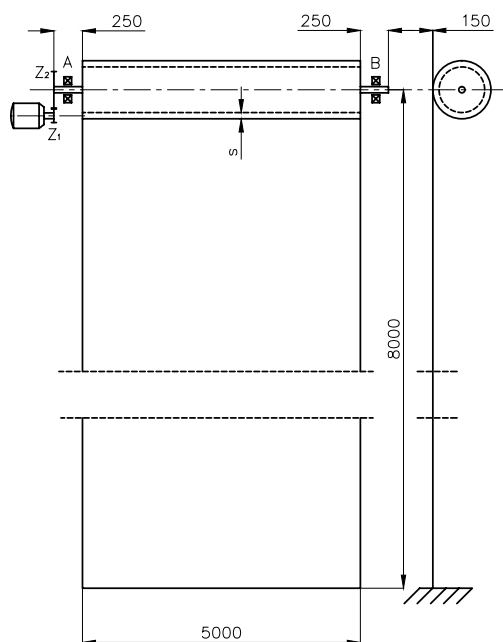
**DERIVATO DAL TEMA D'ESAME  
DELLA SESSIONE SUPPLETIVA 2016**

Una serranda industriale in lega di alluminio alta 8 metri e larga 5 metri deve aprirsi completamente in un tempo massimo di 10 secondi. La massa della stessa è di 5 kg/mq e il tamburo su cui si avvolge è costituito da un albero cavo in acciaio, il cui diametro esterno risulta di 150 mm. Durante la salita, la saracinesca si avvolge intorno all'albero tubolare formando una figura geometrica assimilabile a una spirale di Archimede; a sollevamento completato la saracinesca risulta avvolta intorno al tubolare con 7 spire, il cui raggio esterno (ingombro massimo) raggiunge il valore di circa 28 cm.

a) calcolare la massa della saracinesca e la potenza da assegnare al motore del riduttore considerando che per tener conto degli attriti il rendimento complessivo è stato assunto pari a 0,75; dare, inoltre, alcune indicazioni di massima sul motore elettrico da montare;

- b) dimensionare l'albero cavo su cui si avvolge la serranda (calcolo dello spessore), il cui carico di rottura è pari a 700 N/mm<sup>2</sup>, considerando che per compensare i problemi inerziali e di attrito conviene aumentare il peso della serranda del 10%;
- c) dimensionare i perni A e B scegliendo i cuscinetti più idonei sapendo che la serranda dovrà lavorare per almeno 250 000 cicli.

1. Effettuare il dimensionamento modulare della coppia di ruote dentate a denti dritti 1 e 2 il cui rapporto di trasmissione risulta pari a 5.
2. Calcolare il rendimento della medesima coppia di ruote.
3. Considerando la possibilità di sostituire la stessa con una coppia ruota-vite senza fine, valutare le differenze applicative e/o la convenienza di rendimento rispetto al primo riduttore.



**Fig. 1**  
Schema della saracinesca  
e del suo albero.

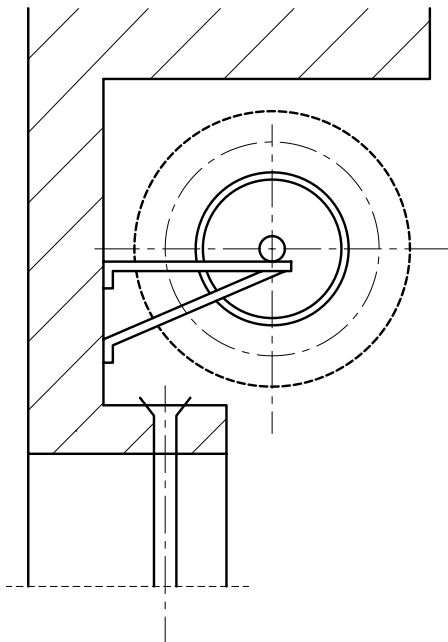
## SOLUZIONE

### PRIMA PARTE

#### Calcolo della massa e della potenza impegnata

Quando è sollevata, la saracinesca si avvolge a spirale (approssimativamente) intorno all'albero tubolare (► Fig. 2); durante la discesa, la spirale si svolge e la saracinesca scorre in verticale lungo due guide montate sui muri laterali. Con la saracinesca scesa fino a toccare terra, a fondo corsa, occorre prevedere che un ulteriore tratto di saracinesca rimanga avvolto intorno all'albero tubolare, saldamente vincolato su di esso per meglio assicurare il collegamento tra i due: si ipotizza che tale tratto sia avvolto per circa mezzo giro, per cui, ipotizzando lo spessore della parete della tapparella in 1,5 cm e 2,5 cm in corrispondenza dei perni di articolazione, la lunghezza totale della saracinesca vale:

$$L_{\text{tot}} = l + \pi(r + s) = 800 + \pi \times (7,5 + 2,5) \approx 830 \text{ cm}$$



**Fig. 2**

L'albero tubolare con la saracinesca completamente avvolta, posizionato all'interno del vano ricavato nella parete.

La velocità di salita e discesa vale:

$$v = \frac{s}{\Delta t} = \frac{8}{10} = 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 80 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

La massa della saracinesca che deve essere sollevata è quella corrispondente all'altezza di 8 m, pari al prodotto tra la sua superficie  $A$  per la massa al metro quadro:

$$A = 5 \times 8 = 40 \text{ m}^2$$

La massa sollevabile  $m_s$  delle tapparelle vale:

$$m_s = \rho A = 5 \times 40 = 200 \text{ kg}$$

Si aggiungono ulteriori 6 kg a sentimento per tenere conto degli organi aggiuntivi (maniglie, serratura a barre orizzontali, agganci, rinforzo sulla base che poggia sul terreno ecc.), per cui la massa diventa

$m'_s = 206$  kg. Come da indicazioni del testo, si deve aggiungere un ulteriore 10% per tenere conto di attriti e inerzie nel calcolo della potenza necessaria al sollevamento:

$$m = m'_s + 10\% m'_s = 206 + 0,1 \times 206 = 227 \text{ kg}$$

Il peso  $Q$  da sollevare vale:

$$Q = m g = 227 \times 9,81 = 2237 \text{ N}$$

Per ragioni di comodo, il peso  $Q$  da sollevare verrà assunto anche come peso totale gravante sull'albero. Si calcola la potenza necessaria al moto ideale, senza attriti:

$$P = Q v = \frac{2237 \times 0,8}{1000} = 1,79 \text{ kW}$$

Noto il rendimento, si calcola la potenza effettiva che tiene conto degli attriti:

$$P_{eff} = \frac{P}{\eta} = \frac{1,79}{0,75} = 2,4 \text{ kW}$$

La coppia motrice  $C$  sull'albero tubolare portante è pari al prodotto del peso  $Q$  per il raggio di avvolgimento della saracinesca intorno al suo supporto tubolare.

Il raggio medio della spirale, compreso tra il raggio massimo e il raggio esterno del tubolare vale:

$$r_m = \frac{28 + 7,5}{2} \approx 17,8 \text{ cm}$$

Con questo valore si calcola la coppia motrice  $C$  sull'albero tubolare portante:

$$C = Q r_m = \frac{2237 \times 0,178}{0,75 \times 1000} \approx 530 \text{ N m}$$

La coppia  $C$  corrisponde al momento torcente  $M_2$  agente sull'albero, la cui conoscenza è indispensabile per svolgere i calcoli di progetto del suddetto albero tubolare (come si può osservare dal punto successivo).

La velocità angolare dell'albero al raggio medio è:

$$\omega = \frac{v}{r_m} = \frac{80}{17,8} = 4,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

con questo valore si verifica la potenza effettiva lorda precedentemente trovata:

$$P_{eff} = C \omega = \frac{530 \times 4,5}{1000} = 2,4 \text{ kW}$$

La frequenza di rotazione dell'albero tubolare vale:

$$n = \frac{30 \omega}{\pi} = \frac{30 \times 4,5}{\pi} = 43 \frac{\text{giri}}{\text{min}}$$

Si calcola la frequenza di rotazione  $n_m$  del motore, ricordando che tra albero e motore è interposto un riduttore avente il rapporto di trasmissione  $i = 5$ , onde verificare la fattibilità del progetto:

$$n_m = i \cdot n = 5 \times 43 = 215 \frac{\text{giri}}{\text{min}}$$

Conviene calcolare il numero  $p$  delle coppie polari del motore: a tal proposito, deve risultare un numero intero, pena la necessità di ridefinire il rapporto di trasmissione; nel presente caso si avrà:

$$p = \frac{60 f}{n} = \frac{60 \times 50}{215} = 13,95 \approx 14 \text{ coppie polari}$$

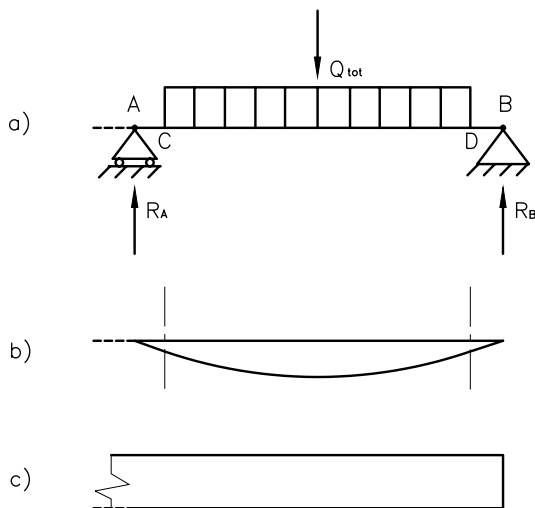
Con 14 coppie polari la frequenza di rotazione del campo magnetico rotante vale:

$$n = \frac{60 f}{p} = \frac{60 \times 50}{14} = 214,3 \frac{\text{giri}}{\text{min}}$$

Il valore reale della frequenza di rotazione del motore sarà ulteriormente inferiore, anche se di poco, a causa dell'effetto di scorrimento. Si radunano, infine, le indicazioni di massima sul motore di trazione: motore asincrono monofase alimentato alla tensione  $v = 220$  v, alla frequenza di rete  $f = 50$  Hz; potenza effettiva  $P_{\text{eff}} = 2,4$  kW; 14 coppie polari statoriche.

### Dimensionamento del tubolare

L'albero tubolare su cui si avvolge la saracinesca viene schematizzato in forma di trave isostatica AB semplicemente appoggiata sui suoi supporti, caricata dal peso  $Q = 2237$  N della tapparella, considerato uniformemente distribuito lungo i 5 m del tubolare, come evidenziato nella **figura 3**.



**Fig. 3**

Trave matematica:

- a) schema;
- b) diagramma del momento flettente;
- c) diagramma del momento torcente  $M_2$ .

La bassa velocità di rotazione e i lunghi periodi di pausa tipici delle saracinesche consigliano di eseguire una progettazione dell'albero di tipo statico, dato che gli effetti della fatica sono molto ridotti, quindi trascurabili. La principale criticità che può verificarsi nell'impianto è costituita dall'insorgere di deformazioni di flessione nell'albero tubolare che, con il passare del tempo, diventano permanenti; la curvatura dell'albero costituisce la causa principale di deterioramento dei cuscinetti posti sui supporti come pure dei denti dell'ingranaggio riduttore. A tale scopo si ritiene propizio eseguire il progetto dell'albero tubolare a deformazione imposta.

Il calcolo del tubolare seguirà un procedimento a iterate. Nella prima iterata si assume il peso della serranda completamente avvolta come carico esterno; dopo aver definito dimensioni e peso dell'albero, si eseguirà una seconda iterata in cui si sommeranno gli effetti dei due pesi, della serranda e dell'albero. Sotto l'azione del peso della serranda, le due reazioni vincolari verticali sui due supporti A e B, per ragioni di simmetria, risultano uguali e valgono:

$$R_A = R_B = \frac{Q}{2} = \frac{2237}{2} = 1118,5 \text{ N}$$

La lunghezza  $l$  dell'albero compresa fra le mezzerie dei supporti A e B vale:

$$l = \frac{0,25}{2} + 5 + \frac{0,25}{2} = 5,25 \text{ m}$$

Alle due estremità dell'albero vengono montati due dischi in acciaio per collegare il tubolare con i perni; della loro presenza non si tiene conto nel calcolo strutturale. Il carico al metro lineare della serranda completamente avvolta vale:

$$q_s = \frac{Q}{5} = \frac{2237}{5} = 447,4 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 447,4 \times 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Si inizia con il calcolo del momento flettente nel tratto AC avente lunghezza 125 mm. Nel vincolo A il momento flettente è, di regola, nullo:  $M_A = 0$ . Nel tratto AC l'andamento del momento è lineare:

$$M_C = R_A \times AC = 1118,5 \times 0,125 = 140 \text{ N m}$$

Si esplora l'andamento della caratteristica di sollecitazione di momento flettente nel tratto successivo al punto C, in base allo schema riportato nella **figura 3a**, avendo assunto  $x$  come ascissa curvilinea, la cui origine è posta nel punto C:

$$M + q_s \frac{x^2}{2} - R_A \times (0,125 + x) = 0$$

$$M = R_A (0,125 + x) - q_s \frac{x^2}{2} = 1118,5 \times (0,125 + x) - 447,4 \times \frac{x^2}{2} = 140 + 1118,5 x - 223,7 x^2$$

Per  $x = 0$  ci si pone nel punto C: la formula conferma che  $M_C = 140 \text{ N m}$ .

Per  $x = 2,5 \text{ m}$  si perviene nel punto K di mezzeria in cui il momento raggiunge il valore massimo  $M_{\max}$ :

$$M_{\max} = 140 + 1118,5 \times 2,5 - 223,7 \times 2,5^2 = 140 + 2796,25 - 1398,1 = 1538 \text{ N m}$$

Come verifica, si impone  $x = 5 \text{ m}$ , così da analizzare il punto D all'estremità destra dell'albero tubolare: in conseguenza della simmetria si deve ottenere  $M_C = M_D$ . Infatti si ha:

$$M_D = 140 + 1118,5 \times 5 - 223,7 \times 5^2 = 140 + 5592,5 - 5592,5 = 140 \text{ N m}$$

Il grafico qualitativo del momento flettente è riportato nella **figura 3b**. Si calcola il momento flettente ideale  $M_{f,id}$  massimo nella sezione di mezzeria, la più sollecitata:

$$M_{f,id} = \sqrt{M_{\max}^2 + 0,75 \times M_2^2} = \sqrt{1538^2 + 0,75 \times 530^2} = 1605 \text{ N m}$$

La progettazione a deformazione imposta dovuta alla flessione prevede che alla trave sia attribuita la seguente limitazione alla freccia massima:

$$f_{max} \leq \frac{l}{3000}$$

Nel presente caso si ha:

$$f_{max} \leq \frac{5250}{3000} = 1,75 \text{ mm}$$

Si ricava la formula della freccia massima in mezzeria consultando la **tabella H-45** relativa ai valori delle frecce e delle rotazioni di travi soggette a vari sistemi di carico, al punto n°6, riportata nel *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. H-181). Occorre rilevare come il nostro caso si discosta in parte da quello citato nella suddetta tabella, in quanto qui la trave presenta due tratti laterali non caricati dal carico distribuito, aventi funzione di perni di estremità; vista la piccolezza delle loro dimensioni se confrontate con la lunghezza del tratto centrale di 5 m, l'errore che si compie sarà senza dubbio trascurabile. La formula della freccia in mezzeria è la seguente:

$$f = \frac{5}{384} \times \frac{q_s l^4}{E I}$$

Si inseriscono i valori numerici esprimendoli in millimetri:

$$1,75 = \frac{5}{384} \times \frac{447,4 \times 10^{-3} \times 5250^4}{205\,000 I}$$
$$I = \frac{5 \times 447,4 \times 10^{-3} \times 5250^4}{1,75 \times 384 \times 205\,000} = 12\,336\,162 \text{ mm}^4$$

Si richiama la formula del momento quadratico di superficie per una sezione circolare cava:

$$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64} D^4 (1 - \lambda^4)$$

Si inseriscono i valori numerici in millimetri:

$$12\,336\,162 = \frac{\pi}{64} \times 150^4 \times (1 - \lambda^4)$$

Si pone in evidenza a primo membro l'incognita costituita dal rapporto di forma:

$$\lambda^4 = 1 - \frac{64 \times 12\,336\,162}{\pi \times 150^4} = 1 - 0,4964$$

$$\lambda = \sqrt[4]{0,5036} = 0,8424$$

Noto il rapporto di forma  $\lambda$ , si calcolano il diametro interno  $d$  e lo spessore  $s$  della lamiera:

$$d = \lambda D = 0,8424 \times 150 = 126,36 \text{ mm}$$

che si arrotonda in difetto a 126 mm per ragioni di sicurezza; il tubolare avrà dunque spessore di 12 mm. Il modulo resistente reale vale:

$$W_f = \frac{\pi}{32} \times \frac{D^4 - d^4}{D} = \frac{\pi}{32} \times \frac{150^4 - 126^4}{150} = 166\,375 \text{ mm}^3$$

La tensione di lavoro (reale) vale:

$$\sigma_l = \frac{M_{fid}}{W_f} = \frac{1605 \times 10^3}{166\,375} \approx 9,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Nota la tensione  $\sigma_l$  di lavoro, si determina il grado di sicurezza a rottura a cui opera il sistema:

$$g_R = \frac{R_m}{\sigma_l} = \frac{700}{9,3} \approx 75$$

Il grado di sicurezza a rottura si presenta di valore assai elevato, per cui si può, a titolo provvisorio, confermare il progetto sin qui svolto.

Per ragioni di completezza si preferisce eseguire una seconda iterata del calcolo dell'albero, ora che sono note le sue dimensioni. A tale scopo si calcola il peso proprio del tubolare; si incomincia con la superficie anulare  $A$  e a seguire con il volume  $V$  e la massa  $m_t$ :

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} \times (150^2 - 126^2) = 5202,5 \text{ mm}^2 = 0,52025 \text{ dm}^2$$

$$V = A l = 0,52025 \times 50 = 26 \text{ dm}^3$$

$$m_t = \rho V = 7,85 \times 26 = 204,1 \text{ kg}$$

Il peso vale:

$$Q_t = m_t g = 204,1 \times 9,81 = 2002 \text{ N}$$

Il carico distribuito del tubolare:

$$q_t = \frac{Q_t}{l} = \frac{2002}{5} = 400,4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Si aggiornano le due reazioni vincolari nei supporti A e B, sotto l'azione congiunta del peso dell'albero e della serranda:

$$R_A = R_B = \frac{(Q + Q_t)}{2} = \frac{2237 + 2002}{2} = 2119,5 \text{ N}$$

Si riprende il calcolo del momento, avendo cura di sommare i due carichi distribuiti, quello della saracinesca  $q_s$  più quello dell'albero tubolare  $q_t$ :

$$M + (q_s + q_t) \frac{x^2}{2} - R_A (0,125 + x) = 0$$

Il momento massimo in mezzeria vale:

$$M_{max} = R_A \times (0,125 + x) - (q_s + q_l) \times \frac{x^2}{2} = 2119,5 \times (0,125 + 2,5) - (447,4 + 400,4) \times \frac{2,5^2}{2} =$$
$$= 5563,7 - 2649,4 = 2914,3 \text{ N m}$$

Anche in questa seconda iterata, l'andamento qualitativo del momento flettente è rappresentato dalla **figura 3b**. Si aggiorna il momento flettente ideale  $M_{f,id}$  massimo nella sezione di mezzeria:

$$M_{f,id} = \sqrt{M_{max}^2 + 0,75 M_2^2} = \sqrt{2914,3^2 + 0,75 \times 530^2} = 2950,2 \text{ N m}$$

La tensione di lavoro vale:

$$\sigma_l = \frac{M_{f,id}}{W_f} = \frac{2950,2 \times 10^3}{166\,375} = 17,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Anche in questo caso il grado di sicurezza a rottura rimane assai elevato:

$$g_R = \frac{R_m}{\sigma_l} = \frac{700}{17,7} \approx 40$$

### Considerazioni sul progetto dell'albero tubolare

Come si è visto, la soluzione sin qui determinata per il tubolare è nata in base all'esigenza di garantire un'adeguata resistenza alla deformazione di flessione e consiste in una struttura estremamente massiccia, tant'è vero che il peso del tubolare è praticamente analogo al peso della serranda, come a dire, la tara è uguale al peso netto: la soluzione si presenta efficace ma inefficiente. Risulta allora indispensabile riprendere il progetto dell'albero, allo scopo di migliorarne l'efficienza apportando una riduzione di pesi e di costi, eseguendo una terza iterata.

Si procede con la riprogettazione dell'albero tubolare, rivedendo i criteri da adottare per ottenere un alleggerimento della struttura, pur conservando un'adeguata rigidità flessionale. Si opta per una struttura tubolare intervallata da dischi circolari di acciaio, saldati lungo la circonferenza interna del tubolare, con funzione di irrigidenti: la nuova proposta prevede di montare non due, ma tre dischi equidistanti a 2,5 m l'uno dall'altro; in tal modo, oltre al primo e all'ultimo posti alle estremità del tubolare con funzione di collegamento con i due perni, ne viene inserito uno in più in posizione centrale, avente spessore di 2 mm: è come se la trave fosse stata scomposta in due travi uguali peraltro rigidamente collegate assialmente tra di loro; la singola trave matematica si presenta in forma di trave incastrata a entrambi gli estremi, laddove vi sono i dischi irrigidenti; ha la lunghezza di 250 cm e il carico uniformemente distribuito: il progetto verrà condotto sulla singola campata.

La trave è iperstatica, ma la sua soluzione è riportata nella **tabella H-46** relativa alle travi variamente vincolate e sottoposte ai tipi di carichi più comuni, riportata nel *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. H-190). Si rileva la formula della freccia massima in mezzeria:

$$f = \frac{1}{384} \times \frac{q_s l^4}{E I}$$

Si riprende la limitazione alla freccia massima:

$$f_{max} \leq \frac{l}{3000} = \frac{2500}{3000} \approx 0,83 \text{ mm}$$



Si inseriscono i valori numerici esprimendoli in millimetri:

$$0,83 = \frac{1}{384} \times \frac{447,4 \times 10^{-3} \times 2500^4}{205\,000\,I}$$

$$I = \frac{447,4 \times 10^{-3} \times 2500^4}{0,83 \times 384 \times 205\,000} = 267\,481\,\text{mm}^4$$

Si riprende la formula del momento quadratico di superficie per la sezione circolare cava:

$$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64} \times D^4 \times (1 - \lambda^4)$$

inserendo i valori numerici in millimetri si ottiene:

$$267\,481 = \frac{\pi}{64} \times 150^4 (1 - \lambda^4)$$

Si pone in evidenza a primo membro il rapporto di forma:

$$\lambda^4 = 1 - \frac{64 \times 267\,481}{\pi \times 150^4} = 1 - 0,011 = 0,989$$

$$\lambda = \sqrt[4]{0,989} = 0,997$$

Nota il rapporto di forma  $\lambda$ , si definiscono il diametro interno  $d$  e lo spessore  $s$  della lamiera:

$$d = \lambda \times D = 0,997 \times 150 = 149\,\text{mm}$$

si arrotonda in difetto tale valore a 148 mm, così da impiegare un tubolare con spessore di 1 mm. Il modulo resistente reale vale:

$$W_f = \frac{\pi}{32} \times \frac{D^4 - d^4}{D} = \frac{\pi}{32} \times \frac{150^4 - 148^4}{150} = 17\,321\,\text{mm}^3$$

La tensione di lavoro (reale) vale:

$$\sigma_l = \frac{M_{fid}}{W_f} = \frac{1605 \times 10^3}{17\,321} = 92,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Nota la tensione  $\sigma_l$  di lavoro, si determina il grado di sicurezza a rottura a cui opera il sistema:

$$g_R = \frac{R_m}{\sigma_l} = \frac{700}{92,7} \approx 7,5$$

Il valore così trovato è ampiamente accettabile.

Si calcola il nuovo peso proprio del tubolare; si incomincia con le superfici tubolare  $A$  e dei tre dischi  $A_d$ :

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} \times (150^2 - 148^2) = 468,1\,\text{mm}^2 = 0,04681\,\text{dm}^2$$

$$A_d = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} \times 148^2 = 17\,203\,\text{mm}^2 = 1,7203\,\text{dm}^2$$

I volumi  $V$  della superficie anulare e  $V_d$  dei tre dischi valgono:

$$V = A l = 0,04681 \times 50 = 2,34 \text{ dm}^3$$

$$V_d = 3 A_d s = 3 \times 1,7203 \times 0,02 = 0,1 \text{ dm}^3$$

Le masse  $m_t$  della superficie anulare e  $m_d$  dei tre dischi valgono:

$$m_t = \rho V = 7,85 \times 2,34 = 18,4 \text{ kg}$$

$$m_d = \rho V_d = 7,85 \times 0,1 = 0,785 \text{ kg}$$

La massa dei tre dischi verrà da qui in avanti trascurata in quanto inferiore al kilogrammo.  
Il peso del tubolare vale:

$$Q_t = m_t g = 18,4 \times 9,81 = 180,5 \text{ N}$$

Si noti come questa nuova soluzione con tre sottili dischi irrigidenti ha apportato una riduzione del peso di oltre dieci volte, rispetto alla soluzione iniziale. Il carico distribuito del tubolare misura:

$$q_t = \frac{Q_t}{5} = \frac{180,5}{5} = 36,1 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Si aggiornano le due reazioni vincolari nei supporti A e B, sotto l'azione congiunta del peso dell'albero e della serranda:

$$R_A = R_B = \frac{(Q + Q_t)}{2} = \frac{2237 + 180,5}{2} = 1208,8 \text{ N}$$

Si riprende il calcolo del momento flettente in funzione dei due carichi distribuiti,  $q_s$  della saracinesca più  $q_t$  dell'albero tubolare:

$$M + (q_s + q_t) \frac{x^2}{2} - R_A (0,125 + x) = 0$$

Il momento massimo in mezzzeria vale:

$$\begin{aligned} M &= R_A (0,125 + x) - (q_s + q_t) \frac{x^2}{2} = 1208,8 \times (0,125 + 2,5) - (447,4 + 36,1) \times \frac{2,5^2}{2} = \\ &= 3173,1 - 1510,9 = 1662,2 \text{ N m} \end{aligned}$$

Si aggiorna il momento flettente ideale  $M_{f,id}$  massimo nella sezione di mezzzeria:

$$M_{f,id} = \sqrt{M_{max}^2 + 0,75 M_2^2} = \sqrt{1662,2^2 + 0,75 \times 530^2} = 1724,4 \text{ N m}$$

La tensione di lavoro nel tubolare vale:

$$\sigma_l = \frac{M_{f,id}}{W_f} = \frac{1724,4 \times 10^3}{17\,321} \approx 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Anche in questo caso il grado di sicurezza a rottura risulta abbondante:

$$g_R = \frac{R_m}{\sigma_f} = \frac{700}{100} = 7$$

### Alcune considerazioni conclusive sull'interpretazione del calcolo

Il calcolo condotto nella terza iterata è di tipo approssimato: avendo operato, per ovvie ragioni di simmetria, su una sola delle due travi gemelle incastrate, si è tralasciato il fatto che il disco irrigidente centrale che funge da incastro per la semitrave sinistra come pure per la destra, sia a sua volta libero di avere cedimenti nello spazio, essendo privo di vincoli; nel calcolo, infatti, il suddetto disco irrigidente viene assimilato a un perno intermedio portante virtuale, cosa che di fatto non avviene nella realtà: ne consegue che la rigidezza reale del sistema è inferiore a quella teorica a calcolo. Occorre tuttavia ricordare che sicuramente durante l'assemblaggio in officina verranno applicati più dischi irrigidenti interni, non solo uno in mezzzeria bensì almeno tre, intervallati a una distanza di 1,25 m per un totale di cinque dischi (due di estremità più tre intermedi), senza generare alcuna complicazione in sede costruttiva e apportando un rilevante incremento alla rigidezza complessiva. Il calcolo, ancorché approssimato, garantisce comunque la stabilità strutturale del sistema.

### Calcolo dei perni

Si procede ora al calcolo dei due perni A e B e relativi cuscinetti a sfere. I perni sono montati sui due dischi di estremità dell'albero tubolare e hanno una distanza di 0,125 m compresa tra disco e asse del cuscinetto. Come già visto in precedenza, le due reazioni vincolari nei supporti A e B, sotto l'azione congiunta del peso dell'albero e della serranda, valgono:

$$R_A = R_B = 1208,8 \text{ N}$$

Anche per i perni si impiega l'acciaio C 40 da bonifica, avente un carico di snervamento  $R_{el} = 460 \text{ N/mm}^2$ ; si calcola la tensione ammissibile  $\sigma_{ams}$  statica:

$$\sigma_{ams} = \frac{R_{el}}{g_s} = \frac{460}{1,8} = 255,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

La tensione ammissibile  $\sigma_{amf}$  a fatica alterna vale:

$$\sigma_{amf} = \frac{\sigma_{ams}}{3} = \frac{255,5}{3} = 85 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Si passa alla determinazione del diametro  $d_B$  del perno B posto sull'estremità destra dell'albero:

$$d_B = \sqrt{\frac{5 R_B L}{\sigma_{amf}}} = \sqrt{\frac{5 \times 1208,8}{85}} 1,5 = 10,33 \text{ mm}$$

Si arrotonda il diametro  $d_B$  a 12 mm, valore contemplato in base alla serie di Renard R10, come indicato nella **tabella E.5** relativa alle dimensioni lineari nominali per organi meccanici riportata nel *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. E-11); l'adozione di un valore unificato per il diametro del perno garantisce la reperibilità di un cuscinetto da catalogo. La lunghezza del perno vale:

$$L = 1,5 d_B = 1,5 \times 12 = 18 \text{ mm}$$

La serranda deve eseguire 250 000 cicli di apertura e chiusura. Ogni ciclo comprende 7 + 7 giri completi dell'albero, come calcolato precedentemente; si calcolano i milioni di cicli:

$$250\,000 \times (7 + 7) = 3\,500\,000 \text{ cicli} = 3,5 \text{ milioni di cicli}$$

Si calcola il coefficiente  $C$  di carico dinamico del cuscinetto a sfere mediante l'apposita formula:

$$L_{10} = \left( \frac{C}{P} \right)^p$$

Si passa ai logaritmi:

$$\ln L_{10} = p \ln \frac{C}{P}$$

Assumendo:

$$p = 3 \\ P = R_A = 1208,8 \text{ N}$$

si ottiene:

$$\ln 3,5 = 3 \ln \frac{C}{1208,8}$$

$$1,252 = 3 \ln \frac{C}{1208,8}$$

$$0,418 = \ln \frac{C}{1208,8}$$

Si passa agli esponenziali:

$$e^{0,418} = \frac{C}{1208,8}$$

$$C = 1,52 \times 1208,8 \approx 1838 \text{ N}$$

Consultando i cataloghi dei cuscinetti come, per esempio, l'estratto riportato nella **tabella 1.69** relativa ai principali cuscinetti a sfere, riportata nel *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. I-100), si trova il cuscinetto avente  $d = 12 \text{ mm}$ ,  $D = 28 \text{ mm}$ ,  $B = 8 \text{ mm}$ ,  $C = 5070 \text{ N}$ . Il cuscinetto risulta comodamente montabile sul perno dato che  $B < L$ .

Si passa infine alla determinazione del diametro  $d_A$  del perno intermedio sinistro, sottoposto essenzialmente a torsione, come si nota dal diagramma riportato nella **figura 3c**. Si determina la tensione tangenziale ammissibile a fatica alternata  $\tau_{amf}$ :

$$\tau_{amf} = \frac{1}{3} \frac{\sigma_{ams}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{255,5}{\sqrt{3}} = 49 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Si progetta il perno intermedio a torsione, in cui il momento torcente coincide con il momento  $M_2$  agente sull'albero, calcolato precedentemente:

$$d_A = \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi \times \tau_{amf}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 530 \times 10^3}{\pi \times 49}} = \sqrt[3]{55\,087,1} = 38,1 \text{ mm}$$

Si arrotonda il diametro a 40 mm, valore contemplato in base alla serie di Renard R5, come si può osservare dalla **tabella E.5** relativa alle dimensioni lineari nominali per organi meccanici riportata nel *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. E-11).

Per la scelta del cuscinetto, si consulta l'estratto riportato nella **tabella I.69** relativa ai principali cuscinetti a sfere, riportata nel *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. I-100), confermando il coefficiente di carico dinamico  $C = 1838 \text{ N}$ . Si trova, quindi, il cuscinetto avente  $d = 40 \text{ mm}$ ,  $D = 68 \text{ mm}$ ,  $B = 9 \text{ mm}$ ,  $C = 9750 \text{ N}$ .

Entrambi i perni vengono maggiorati come diametro nel tratto compreso tra il supporto e il collegamento con l'albero, lungo 125 mm. In tal modo si genera una battuta utile per il montaggio del cuscinetto e si opera un rinforzo nella sezione in cui il perno va a innestarsi sul disco di estremità dell'albero, sezione che può a tutti gli effetti essere trattata come un incastro. Il momento d'incastro varrà:

$$M = R_B \cdot 0,125 = 1208,8 \times 0,125 = 151,1 \text{ N m}$$

Si passa infine alla determinazione del diametro dell'albero nei suddetti tratti di collegamento con l'albero mediante la formula di Navier:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M}{\pi \sigma_{amf}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \times 151,1 \times 10^3}{\pi \times 85}} = \sqrt[3]{18\,107} = 26,3 \text{ mm}$$

Nel tratto compreso tra cuscinetto e albero tubolare, si arrotonda il diametro  $d$  del perno destro a 30 mm, valore contemplato in base alla serie di Renard R40, come si può osservare dalla **tabella E.5** relativa alle dimensioni lineari nominali per organi meccanici riportata nel *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. E-11).

## SECONDA PARTE

### Dimensionamento delle ruote dentate

Si tratta di una coppia di ruote dentate a denti dritti che costituiscono il riduttore posto a valle del motore elettrico, il quale trasmette il moto all'albero tubolare. Data la bassa velocità di funzionamento dell'impianto, il dimensionamento di massima dell'ingranaggio verrà condotto mediante calcolo a fatica, seguito dalla verifica a usura.

Noti il rapporto di trasmissione e il momento torcente  $M_2$  agente sul tubolare, si calcola il momento motore  $M_1$  agente sul pignone:

$$M_1 = \frac{M_2}{i} = \frac{530}{5} = 106 \text{ N m}$$

Il momento  $M_1$  entrante nel riduttore è la coppia motrice erogata dal motore elettrico di trazione. La velocità angolare del motore è:

$$\omega = \frac{2 \pi n}{60} = \frac{2 \times \pi \times 214,3}{60} \approx 22,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Si sceglie un fattore di servizio  $f_s = 1,1$  dato che non sono presenti né sovraccarichi né contraccolpi alla partenza; il momento corretto  $M_{corr}$  vale:

$$M_{corr} = f_s M_1 = 1,1 \times 106 = 116,6 \text{ N m}$$

si scelgono due valori per i numeri di denti in modo che forniscano il rapporto di trasmissione richiesto; fra le diverse soluzioni possibili, si sceglie la coppia formata da  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 100$ :

$$i = \frac{100}{20} = 5$$

acciaio scelto è il C 40, acciaio da bonifica di largo impiego generalizzato, avente una tensione ammissibile a fatica pari a  $140 \text{ N/mm}^2$ . Si sceglie un valore medio del coefficiente  $\lambda$  che definisce la lunghezza del dente in base al modulo:  $\lambda = 20$ .

Si progetta a fatica mediante il metodo di Lewis; a tale scopo occorre definire i valori numerici dei diversi fattori. Trattandosi di una ruota lenta, al coefficiente di maggiorazione dinamica del carico  $X_v$  si attribuisce un valore di 0,6. Si ricava il fattore di Lewis dalla **tabella 1.88** relativa ai coefficienti  $y$  di Lewis, riportata nel *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. I-127): per  $z = 20$  denti si assume  $y = 0,32$ . Si applica, infine, la formula di Lewis per ricavare il modulo, secondo il metodo di calcolo a fatica:

$$m = \sqrt[3]{\frac{2 M_{corr}}{\sigma_{max} X_v z \lambda y}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 116\,600}{140 \times 0,6 \times 20 \times 20 \times 0,32}} = \sqrt[3]{21,7} = 2,79 \text{ mm}$$

Si arrotonda al valore unificato  $m = 3 \text{ mm}$ . Si trovano i due diametri primitivi eseguendo i prodotti fra il modulo così trovato e i rispettivi numeri di denti:  $d_1 = 60 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 300 \text{ mm}$ . La velocità periferica per la ruota minore, quella motrice, vale:

$$v_1 = \omega_1 \frac{d_1}{2} = 22,5 \times \frac{60}{2} = 675 \frac{\text{mm}}{\text{s}} = 0,675 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Con questo valore di  $v_1$  si calcola il coefficiente di maggiorazione dinamica del carico, attribuendo al coefficiente empirico  $A$  il valore di 4:

$$X_v = \frac{A}{A + v_1} = \frac{4}{4 + 0,675} = 0,855$$

Essendo il valore così trovato superiore a quello precedentemente ipotizzato, pari a 0,6, non occorre reiterare il calcolo della formula di Lewis e si conferma il valore del modulo calcolato a fatica.

Si completa il calcolo del modulo delle ruote dentate mediante verifica a usura. Inizialmente si calcola la pressione ammissibile in funzione della durezza Brinell dell'acciaio scelto. Occorre per prima cosa trasformare la durata in cicli assegnata, in durata in ore; ogni corsa dura 10 s per cui, interpretando il termine "ciclo" come somma di una corsa di salita e una di discesa, si ha:

$$t = 250\,000 \frac{10 + 10}{3600} = 1389 \text{ h}$$

Si assume una durata arrotondata a 1400 ore. La pressione ammissibile vale:

$$p_{amm} = 2,45 \frac{\text{HB}}{\sqrt[n]{n h}} = 2,45 \frac{180}{\sqrt[4]{214,3 \times 1400}} = 53,91 \frac{\text{daN}}{\text{mm}^2} \approx 539 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

La lunghezza del dente vale:

$$b = \lambda \cdot m = 20 \times 3 = 60 \text{ mm}$$

Infine la pressione di contatto massima che si ha sul fianco del dente misura:

$$p_{max} = K_1 \sqrt{\frac{2 M_{corr,1}}{b d_1 \sin 2\alpha} \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)} = 378 \times \sqrt{\frac{2 \times 116\,600}{60 \times 60 \times \sin 40^\circ} \times \left( \frac{1}{60} + \frac{1}{300} \right)} = 536 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Il valore è accettabile in quanto molto prossimo al valore ammissibile.

### Rendimento medio di ingranamento

Per calcolare il rendimento medio di ingranamento per una coppia di ruote in presa si usa la seguente formula:

$$\eta = 1 - \pi f \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) = 1 - 0,15 \times \pi \times \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{100} \right) = 0,972$$

### Confronto tra ingranaggio a ruote dentate cilindriche e sistema vite senza fine - ruota elicoidale

La terza domanda chiede di analizzare l'eventualità di sostituire il riduttore a ruote dentate cilindriche con un accoppiamento vite senza fine – ruota elicoidale (di seguito VSF-RE). Vengono di seguito presentate le differenze applicative fra le due soluzioni.

- La differenza prevalente consiste nel fatto che la trasmissione avviene fra assi sghembi.
- La VSF-RE è adatta per forti rapporti di riduzione, anche 100.
- La VSF-RE garantisce solitamente l'irreversibilità del moto. Nel caso in esame, in cui occorre movimentare una saracinesca, la VSF-RE permette di sopprimere le due o tre molle a spirale, tra l'altro non citate dal testo, indispensabili per tenere la saracinesca ferma, in modo stabile, anche in qualunque posizione intermedia.
- Le forze scambiate sono triassiali, con componenti radiale, tangenziale e assiale, per cui la VSF-RE richiede il montaggio su uno dei due supporti di un cuscinetto reggispinta.
- Il rendimento è basso, se confrontato con le ruote dentate cilindriche, a causa degli attriti elevati. Il rendimento  $\eta$  della VSF-RE viene espresso come segue:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} (\beta + \phi)}$$

in cui  $\beta$  indica l'angolo di inclinazione dell'elica della vite e  $\phi$  indica l'angolo di attrito; solitamente  $\phi = 3^\circ$ .

Nel caso in cui si voglia assumere una vite a un principio avente  $\beta = 2^\circ 30'$ , il rendimento varrà:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} 2,5^\circ}{\operatorname{tg} (2,5^\circ + 3^\circ)} = 0,45$$

essendo il rendimento inferiore a 0,5, il sistema si presenta sicuramente irreversibile. Può essere utile osservare di quanto esso sia inferiore al rendimento delle ruote dentate, calcolato al punto precedente.