TITOLO: PID e risposte dei sistemi
MATERIE: Sistemi automatici, Elettronica ed Elettrotecnica, TPSEE
OBIETTIVI: analizzare gli effetti del controllo PID con una analisi comparata matematico/grafica.

■ ESPOSIZIONE DEL PROBLEMA DI ANALISI/PROGETTAZIONE

In questo elaborato intendo esplorare il ruolo che hanno i controllori PID nell'automazione, concentrando l'attenzione sugli aspetti matematici della disamina, facendo così tesoro di quanto ho appreso nelle materie di indirizzo.
I risultati matematici e le intuizioni logiche sono inoltre corroborate da esperimenti pratici con l'impiego dei programmi Scilab e Xcos.

La disamina fa riferimento a un sistema con la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 2}$$

Del sistema desidero effettuare i seguenti approfondimenti.

1. Tipo di risposta del sistema.
2. Calcolo della risposta all'impulso del sistema e verifica pratica.
3. Calcolo del valore a regime per ingresso a scalino e verifica pratica.
4. Calcolo del valore a regime del sistema retroazionato con PID di parametri $K_P = 1$, $K_I = K_D = 0$.

■ SVILUPPO DELLA SOLUZIONE CON SPIEGAZIONI, SCHEMI, ELABORAZIONI MATEMATICHE

■ Tipo di risposta del sistema

Metto a confronto la f.d.t con quella generale di un sistema di secondo ordine.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = 0{,}5 \cdot \frac{2}{s^2 + s + 2}$$

Dalla comparazione risulta: $\omega_n = \sqrt{2} \quad 2\xi\omega_n = 1 \qquad \xi = {}^{1}\!/_{2\sqrt{2}} = 0{,}35 \;\; < 1$

Il sistema ha uno smorzamento $\xi < 1$ pertanto le sue risposte hanno senz'altro carattere oscillatorio.
Lo possiamo verificare di seguito con il calcolo della risposta all'impulso.

■ Calcolo della risposta all'impulso del sistema e verifica pratica

Si inizia a scomporre il denominatore.

$$s^2 + s + 2 = 0 \qquad s = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = -{}^{1}\!/_{2} \pm j\frac{\sqrt{7}}{2} = -0{,}5 \pm j1{,}323 = a \pm jb$$

Per chiarezza di esposizione impiego il calcolo letterale con i simboli *a* e *b*.

La risposta all'impulso δ vale: U(s) = L[δt)] · G(s) = G(s).

Ora per antitrasformare l'uscita U(s) applico la scomposizione della frazione e il metodo dei residui.

$$U(s) = \frac{1}{(s-a+jb)(s-a-jb)} = \frac{A}{(s-a+jb)} + \frac{B}{(s-a-jb)}$$

$$A = \left| \frac{1}{(s-a+jb)(s-a-jb)} \cdot (s-a+jb) \right|_{s=a-jb} = \frac{1}{-2jb}$$

$$B = \left| \frac{1}{(s-a+jb)(s-a-jb)} \cdot (s-a-jb) \right|_{s=a+jb} = \frac{1}{2jb}$$

Ora, noti i coefficienti A e B, possiamo esprimere la U(s) in frazioni parziali, ovvero:

$$U(s) = \frac{1}{2jb} \cdot \left[\frac{-1}{(s-a+jb)} + \frac{1}{(s-a-jb)} \right]$$

Antitrasformando si ricava:

$$u(t) = \frac{1}{2jb} \left(-e^{(a-jb)t} + e^{(a+jb)t} \right) = \frac{1}{2jb} e^{at} \left(-e^{-jbt} + e^{jbt} \right)$$

Applico ora la formula di Eulero:

$$e^{\pm j\alpha} = cos\alpha \pm jsen\alpha$$

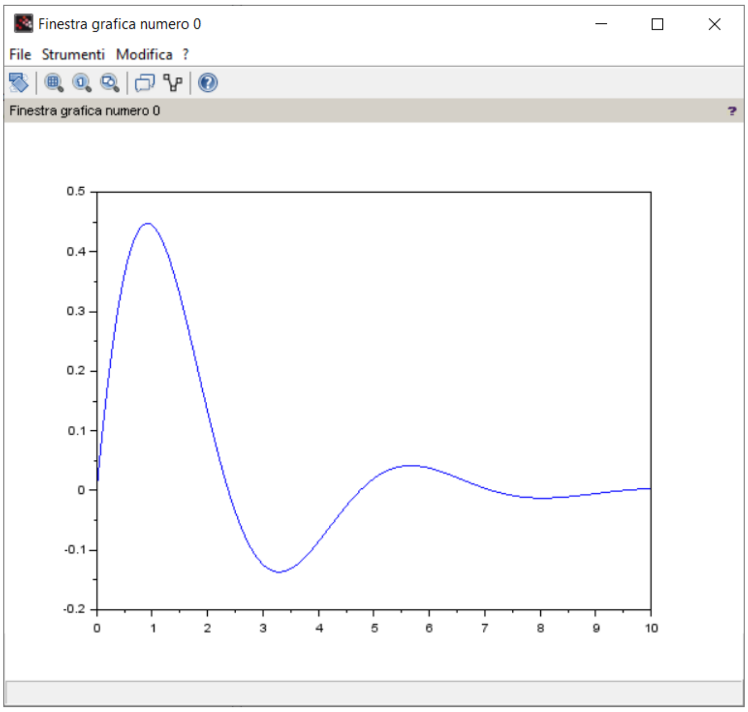
$$u(t) = \frac{1}{2jb} e^{at} (-cosbt + jsenbt + cosbt + jsenbt) = \frac{1}{2jb} e^{at} (2jsenbt) = e^{at} \cdot senbt$$

Come avevamo previsto il sistema risponde con oscillazioni infatti:

- è presente il termine senbt;
- il termine e^{at} rende le oscillazioni smorzate (ricordiamo che *a* è negativo).

Per saggiare la veridicità del risultato simuliamo la risposta con **Scilab**. Possiamo notare la presenza delle oscillazioni nell'avvicinamento all'asintoto zero.

```
-->s=%s
 s  =
    s

-->G=1/(s*s+s+2)
 G  =
       1
    ---------
             2
    2 + s + s

-->Gsis=syslin('c',G)
 Gsis   =
       1
    ---------
             2
    2 + s + s

-->t=0:0.001:10;

-->y=csim('impuls',t,Gsis);

-->plot(t,y)
```



Calcolo del valore a regime per ingresso a scalino e verifica pratica

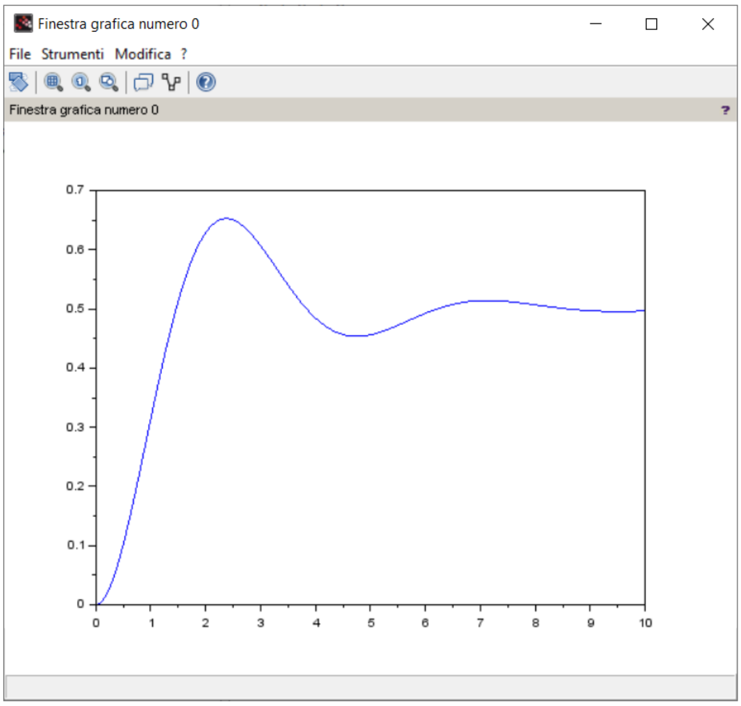
Poiché ci serve solo il valore a regime, possiamo applicare il teorema del limite finale direttamente alla U(s), senza la necessità di calcolare l'antitrasformata dell'uscita.

$$U(s) = L[sca(t)] \cdot \frac{1}{s^2+s+2} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+s+2}$$

$$u(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} sU(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+s+2} = 0{,}5$$

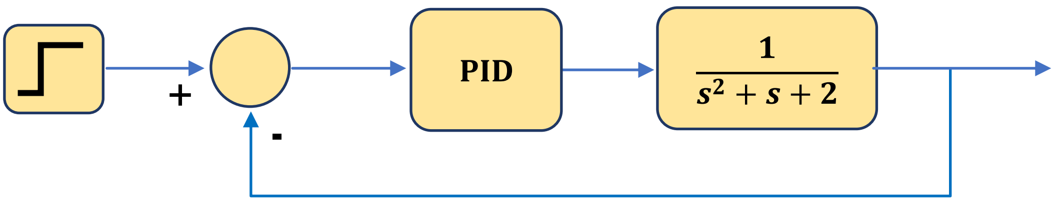
La verifica sperimentale corrobora questo risultato: si può infatti osservare che il sistema tende asintoticamente a 0,5 dopo alcuni periodi di oscillazione.

```
-->s=%s
 s  =
    s

-->G=1/(s*s+s+2)

--> U=G*1/s
 U  =
       1
   -----------
          2   3
   2s + s + s

--> Usis=syslin('c',U)
 Usis  =
       1
   -----------
          2   3
   2s + s + s

--> t=0:0.001:10;

--> y=csim('step',t,Gsis);

--> plot(t,y)
```



Calcolo del valore a regime del sistema retroazionato con $K_P = 1$, $K_I = K_D = 0$.

Collego ora il blocco della f.d.t in retroazione negativa unitaria. Considero un blocco PID con la sola componente proporzionale $K_P = 10$.



La nuova f.d.t vale:

$$G_R(s) = \frac{\dfrac{10}{s^2+s+2}}{1+\dfrac{10}{s^2+s+2}} = \frac{10}{s^2+s+12}$$

$$U(s) = L[sca(t)] \cdot \frac{10}{s^2+s+12} = \frac{1}{s} \cdot \frac{10}{s^2+s+12}$$

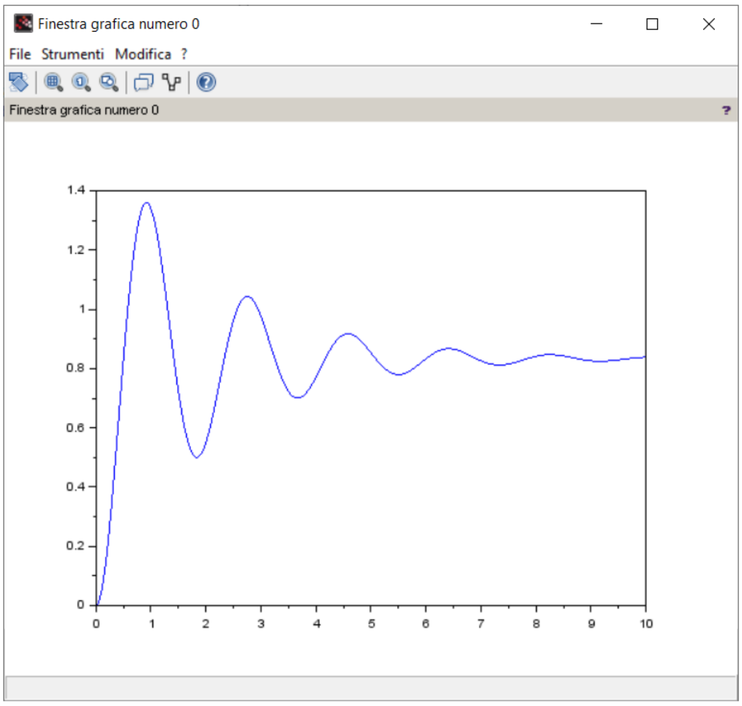
$$u(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} sU(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{10}{s^2+s+12} = 0{,}83$$

Verifico il risultato con Scilab.

```
--> s=%s
 s  =
   s

--> G=1/(s^2+s+2)
 G  =
      1
   ----------
            2
   2 + s + s

--> Kp=10
 Kp  =
   10.

--> GR=(Kp*G)/(1+Kp*G)
 GR  =
      10
   -----------
             2
   12 + s + s
```

```
--> t=0:0.001:10;

--> GRsis=syslin('c',GR)
 GRsis  =


      10
   -----------
             2
   12 + s + s


--> y=csim('step',t,GRsis);

--> plot(t,y)
```

Si nota che, avendo aumentato il guadagno statico del sistema e avendo collocato il sistema in retroazione, il valore a regime si avvicina maggiormente all'ideale unitario.
Sappiamo che questo avviene in quanto, con ingresso a scalino e sistema di tipo zero, l'errore a regime è inversamente proporzionale al guadagno statico.



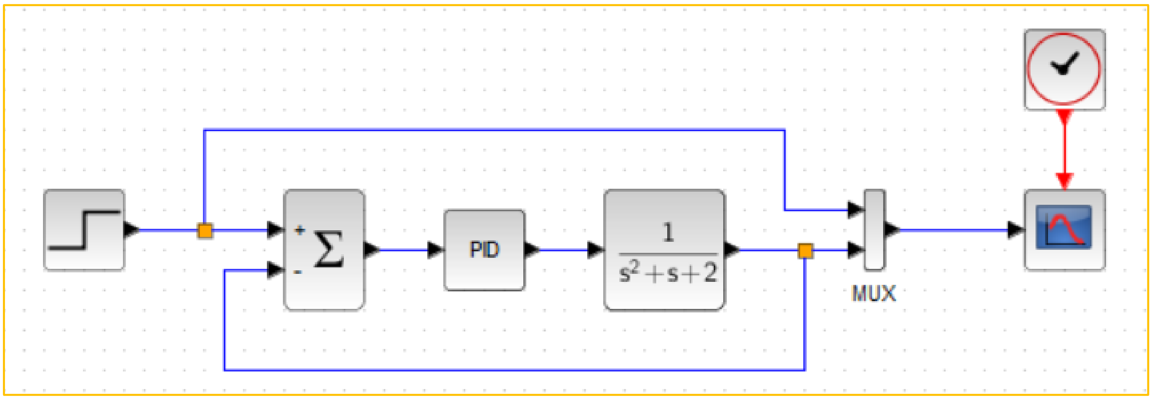
Tuttavia la teoria ci insegna anche che l'aumento di K sollecita troppo il sistema e causa un aumento di pendolazioni. Si vede infatti dal grafico che sono aumentate molto le oscillazioni, a fronte di un valore di regime ancora molto distante da quello ideale!

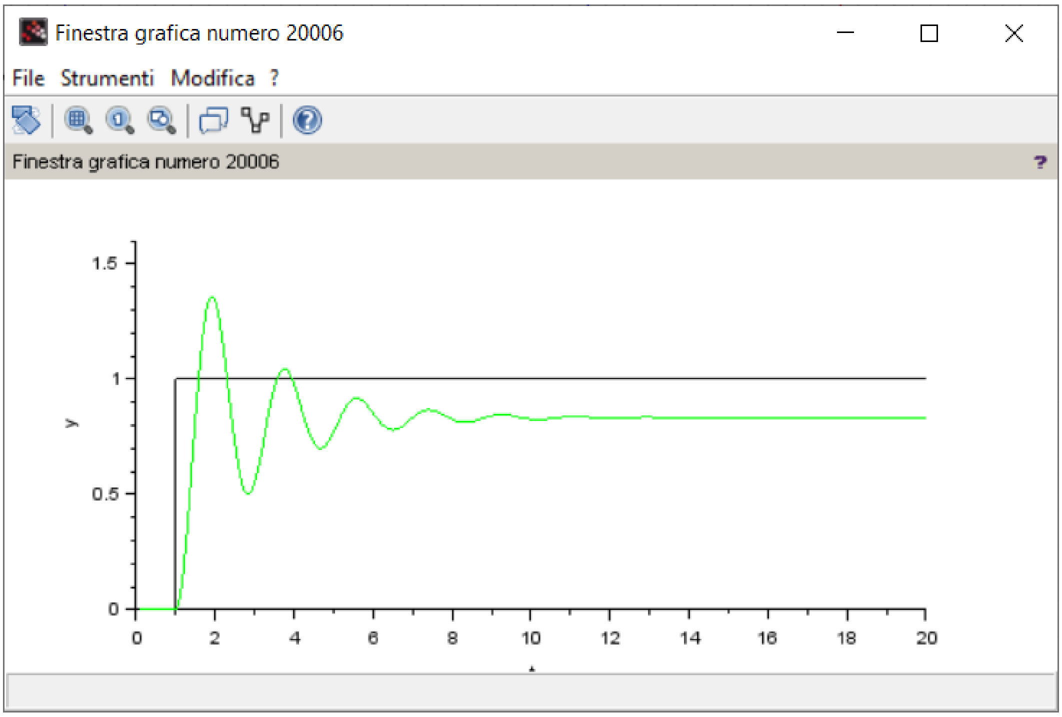
Come noto solo l'azione integrale e quella derivativa possono migliorare i parametri della risposta. Questa disamina viene condotta nella successiva sezione pratica.

VALIDAZIONE DEI RISULTATI OTTENUTI CON UNO O PIU' ESPERIMENTI SIMULATI

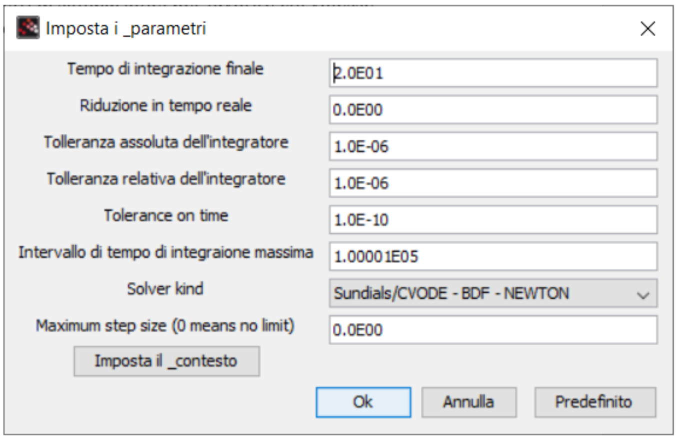
Per approfondire ulteriormente questa analisi in modalità grafica conviene sfruttare il programma **Xcos**, che ci consente di costruire direttamente lo schema a blocchi e sperimentarne la risposta.

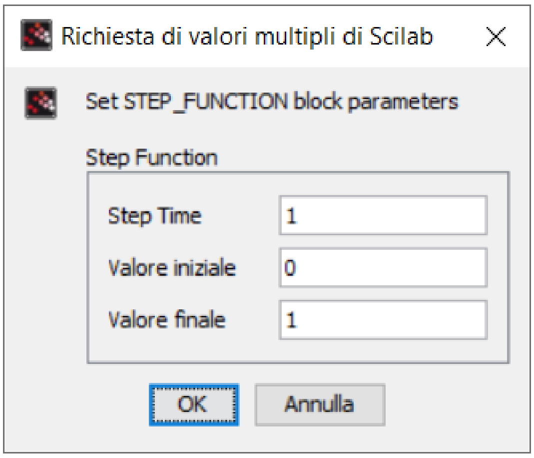
Inizialmente pongo $K_P = 10$, $K_I = K_D = 0$ come nella analisi precedente e ricavo il medesimo grafico.

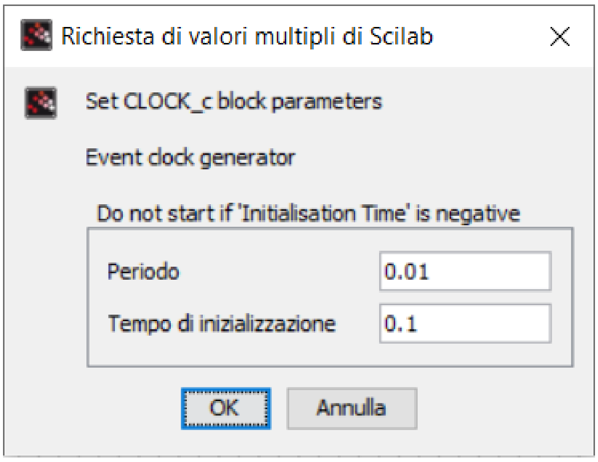


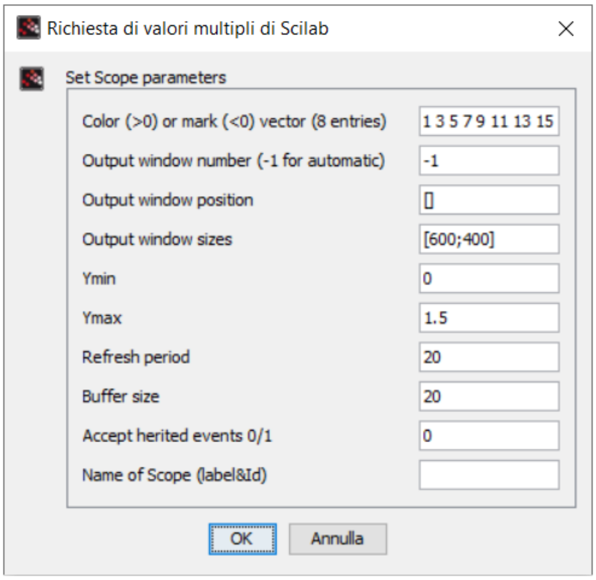


Riporto anche le finestre di impostazione dei parametri di simulazione, per favorire chi volesse sperimentare questi risultati. Il relativo file è comunque annesso a questo elaborato.



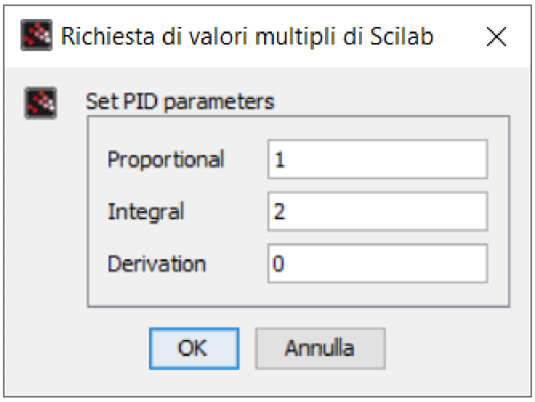




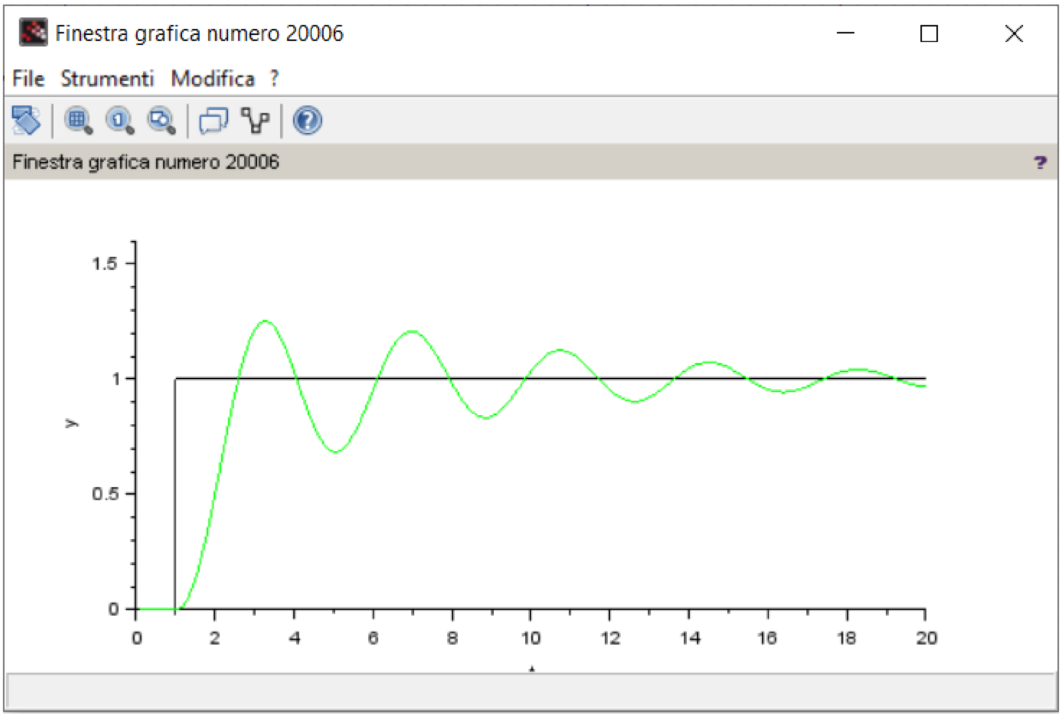


Ora facendo doppio click sul blocco PID ne cambio le impostazioni:

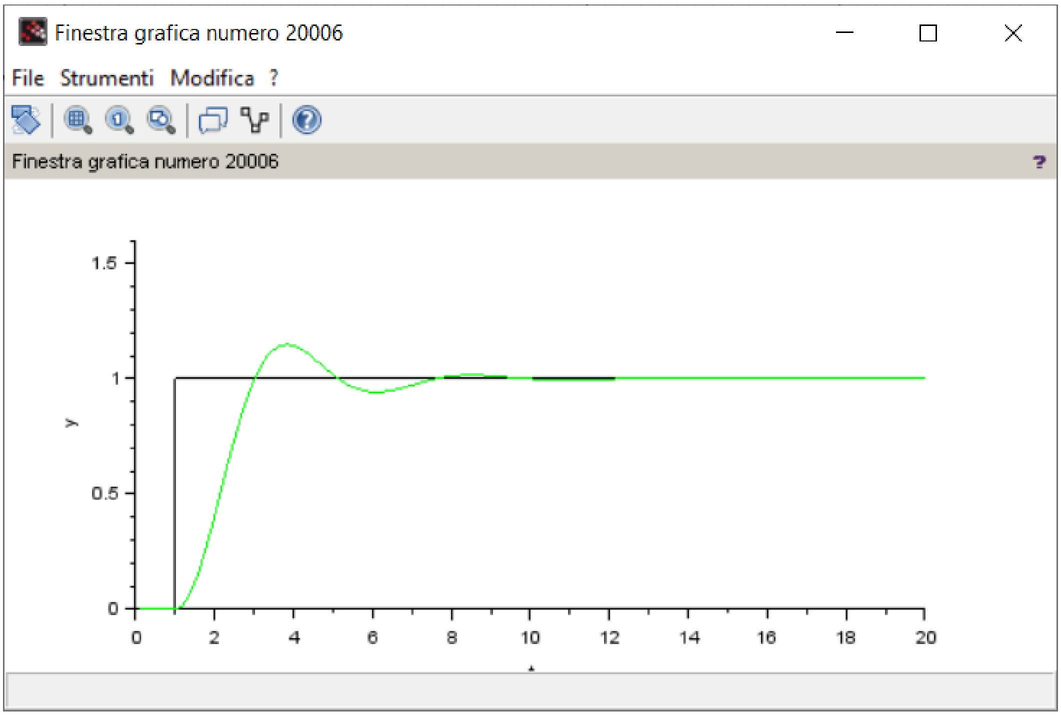
- Diminuisco K_P portandolo a $K_P = 1$;
- Introduco un effetto integrativo impostando $K_I = 2$.



La nuova risposta è migliorata notevolmente: il sistema raggiunge perfettamente il valore impostato all'ingresso dallo scalino.
L'integratore ha infatti elevato il tipo di sistema e un sistema di tipo uno con ingresso a scalino ha errore di regime nullo.
Permangono tuttavia delle oscillazioni, che rendono la risposta non ideale nel transitorio.



Dobbiamo allora introdurre anche l'effetto derivativo, impostando $K_D = 1$.
Come si può osservare le oscillazioni si sono smorzate; questo avviene perché, come noto, a differenza del controllo integrale che interviene a regime ovvero agisce a ritardare, il controllo derivativo interviene nei primi istanti e agisce ad anticipare.



Espansione dell'elaborato mediante contenuti teorici

Dal manuale di Elettrotecnica, Elettronica e Automazione si può reperire materiale da rielaborare per completare la propria esposizione con parentesi di approfondimento teorico, legate ai contenuti dell'elaborato.

- Sezione XVIII – Sistemi

Suggerimenti di possibili percorsi alternativi per nuovi elaborati.

- Sperimentazione dell'errore a regime per diversi tipi di sistemi e di ingressi.
- Risposte dei sistemi di secondo ordine.
- Sistemi analoghi meccanico, termico e idraulico e loro risposte.
- Risposta all'impulso VS risposta in frequenza.